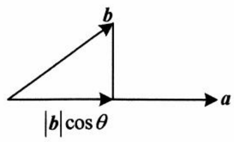
平面向量的数量积

数量积的计算是平面向量版块的核心知识点，计算向量数量积通常有基底法、坐标法、投影法三种方法.

(1)基底法：在平面上选择已知长度和夹角的两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 作为基底，再将计算数量积的两个向量用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示，根据数量积的运算法则，转化为基底的数量积加以计算.

(2)坐标法：建立恰当的平面直角坐标系，求向量的坐标. 若 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2$.

(3)投影法：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta=|\boldsymbol{a}|\cdot(|\boldsymbol{b}|\cos\theta)=|\boldsymbol{b}|\cdot(|\boldsymbol{a}|\cos\theta)$，其中 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 为 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影，$|\boldsymbol{a}|\cos\theta$ 为 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影. 投影法在某些求向量数量积的最值问题中使用起来非常方便.



【例 1】在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，且 $|\overrightarrow{CA}|=3$，点 M 满足 $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MA}$，则 $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CA}$ 等于 (　　)

A. 3　　B. 6　　C. 9　　D. 不确定

【例 2】(2017 成都一诊)已知 A,B 是圆 $O:x^2+y^2=4$ 上的两个动点，$|\overrightarrow{AB}|=2$，$\overrightarrow{OC}=\frac{5}{3}\overrightarrow{OA}-\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$，若 M 是线段 AB 的中点，则 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OM}$ 的值为 (　　)

A. 3　　B. $2\sqrt{3}$　　C. 2　　D. -3

练习：

1. 若 $|\overrightarrow{OA}|=2$，$|\overrightarrow{OB}|=1$，$\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 夹角为 60°，AB 中点为 M，$\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$，则 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OC}=$__________.

3. 已知 A,B 是圆 $O:x^2+y^2=4$ 上的两个动点，$|\overrightarrow{AB}|=2$，$\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$，若 M 是线段 AB 的中点，则 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OM}$ 的值为__________.

5. 已知动直线 l 与圆 $x^2+y^2=4$ 相交于 A,B 两点，$|AB|=2$，点 C 满足 $\overrightarrow{CB}=\frac{5}{2}\overrightarrow{CA}$，若 M 为 AB 中点，则 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OM}$ 的值为（　　）

A. 3　　B. $2\sqrt{3}$　　C. 2　　D. -3

6. 在 $\triangle ABC$ 中，D,E 分别为 BC,AB 的中点，F 为 AD 的中点，若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-1$，$AB=2AC=2$，则 $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CF}$ 的值为________.

7. 若等边 $\triangle ABC$ 的边长为 3，平面内一点 M 满足 $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$，则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MB}=$（　　）

A. 2　　B. $-\frac{5}{12}$　　C. $\frac{5}{12}$　　D. -2

8. (2017 凉山二诊)设 M,N 是直线 $x+y-2=0$ 上的两个动点，且 $|MN|=\sqrt{2}$，则 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$ 的最小值为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. $\frac{5}{2}$　　D. $\frac{3}{2}$

9. 等腰直角三角形 ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=BC=1$，点 M,N 分别是 AB,BC 中点，点 P 是 $\triangle ABC$（含边界）内任意一点，则 $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{MP}$ 的取值范围是（　　）

A. $\left[-\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right]$　　B. $\left[-\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$　　C. $\left[-\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right]$　　D. $\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$

10. 已知 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$BC=2\sqrt{3}$，$\angle BAC=120^\circ$，$\overrightarrow{BE}=3\overrightarrow{EC}$，若 P 是边 BC 上的动点（包括端点），则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AE}$ 的取值范围为________.