

对称性求和问题

典例考题：(2016 全国 2,理 12)已知函数 $f(x)(x \in \mathbf{R})$ 满足 $f(-x)=2-f(x)$,若函数 $y=\frac{x+1}{x}$ 与 $y=f(x)$ 图象的交点为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$, 则 $\sum_{i=1}^m (x_i + y_i) =$ ()

A.0 B.m C.2m D.4m

注意：函数 $f(x)$ 关于点 (a, b) 对称 \Leftrightarrow _____

热点纵横：

1.(2012 四川,文 12)已知函数 $f(x)=(x-3)^3+x-1$, 数列 $\{a_n\}$ 是公差为 0 的等差数列, 且 $f(a_1)+f(a_2)+\dots+f(a_7)=14$, 则 $a_1+a_2+\dots+a_7 =$ ()

A.0 B.7 C.14 D.21

变式 1-1.(2015 复旦自主招生,理 1)已知函数 $f(x)=2015\left(x-\frac{1}{2}\right)^3+x$, 则

$$\sum_{k=1}^{2015} f\left(\frac{k}{2015}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$$

2.(2015 惠州一模,理 8)对于三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a \neq 0)$, 给出定义: 设 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导数, $f''(x)$ 是 $f'(x)$ 的导数, 若 $f''(x)=0$ 有实数解, 则称点 $(x_0, f(x_0))$ 为函数的“拐点”. 某同学经过探究发现: 任何一个三次函数都有“拐点”, 任何一个三次函数都有对称中心, 且“拐点”就是对称中心. 设函数 $g(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{5}{12}$, 则 $g\left(\frac{1}{2015}\right)+g\left(\frac{2}{2015}\right)+\dots+g\left(\frac{2014}{2015}\right) =$ ()

A.1 B.2016 C.2015 D.2014

变式 2-1.(2017 广州一模,理 12)已知函数 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}$, 则 $\sum_{k=1}^{2016} f\left(\frac{k}{2017}\right) =$ ()

A.0 B.504 C.1008 D.2016

变式 2-2. (2018 广州二模,理 12)已知直线 l 与曲线 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+x+1$ 有三个不同

交点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$,且 $|AB|=|AC|$,则 $\sum_{i=1}^3(x_i+y_i)=$ ()

- A.0 B.7 C.14 D.21

3. (2002 课标,理 16)已知函数 $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$,那么 $f(1)+f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f(3)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f(4)+f\left(\frac{1}{4}\right)=$ _____

4. (2018 全国 3,文 16)已知函数 $f(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)+1$, $f(a)=4$,则 $f(-a)=$ _____

5. (2012 全国,文 16)已知函数 $f(x)=\frac{(x+1)^2+\sin x}{x^2+1}$ 的最大值为 M , 最小值 m ,则 $M+m=$ _____

6. (2011 全国,理 12)已知函数 $y=\frac{1}{x-1}$ 的图像与函数 $y=2\sin \pi x(-2 \leq x \leq 4)$ 的图像所有交点的横坐标之和为 ()
A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

7. (2018 安徽高三期末考,理)已知函数 $y=\frac{x^2+x+1}{x}$ 的图像与函数 $y=3\sin \frac{\pi x}{2}+1$ 的图像有 m 个交点,其坐标依次为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_m,y_m)$,则 $\sum_{i=1}^m(x_i+y_i)=$ _____

8. (2016 全国 2,文 12)已知函数 $f(x)(x \in \mathbf{R})$ 满足 $f(x)=f(2-x)$,若函数 $y=|x^2-2x-3|$ 与 $y=f(x)$ 图象的交点为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_m,y_m)$,则 $\sum_{i=1}^m x_i=$ ()
A.0 B. m C. $2m$ D. $4m$

倒序相加法：与首末两项等“距离”的两相和相等，通过“两两配对”，化加法
等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n ：

$$\because S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

$$\therefore S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1$$

$$\therefore 2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_n + a_1) = n(a_1 + a_n)$$

$$\therefore S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

等差数列求和公式的推导，之所

$$(a_1 + a_n) = (a_2 + a_{n-1}) = (a_3 + a_{n-2}) = \cdots = (a_n + a_1)$$

↓

实质上揭示了等差数列“中心对称”的性质：等差数列的项一次关于其“中间项”中心对称。