1．[选修 4-4：坐标系与参数方程]

在直角坐标系 xOy 中，点 $(\frac{1}{2},\sqrt{3})$ 在曲线 C：$\begin{cases}x=k\cos\varphi\\y=m\sin\varphi\end{cases}$（$\varphi$ 为参数）上，对应参数为 $\varphi=\frac{\pi}{3}$.以原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，已知点 P 的极坐标为 $(2,\frac{\pi}{6})$.

（1）直接写出点 P 的直角坐标和曲线 C 的极坐标方程；

（2）设 A，B 是曲线 C 上的两个动点，且 $OA\perp OB$，求 $|OA|^2+|OB|^2$ 的最小值.

2．在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=cos\alpha\\y=sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数），将 C 上每一点的横坐标保持不变，纵坐标变为原来的 3 倍，得曲线 C_1．以 O 为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系.

（1）求 C_1 的极坐标方程

（2）设 M，N 为 C_1 上两点，若 $OM\perp ON$，求 $\frac{1}{|OM|^2}+\frac{1}{|ON|^2}$ 的值.

3．已知曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos\theta\\y=\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=2\sqrt{2}$.

（1）写出曲线 C 的普通方程和直线 l 的直角坐标方程；

（2）设点 P 为曲线 C 上的动点，求点 P 到直线 l 距离的最大值.

4．在直角坐标系 xQy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+2\cos\alpha\\y=4+2\sin\alpha\end{cases}$，（$\alpha$ 为参数），以坐标原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=4\sin\theta$.

(1)把 C_1 的参数方程化为极坐标方程：

(2)求 C_1 与 C_2 交点的极坐标 $\left(\rho\ge0,0\le\theta<2\pi\right)$.

5．选修4－4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xoy 中，以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，已知某圆的极坐标方程为：$\rho^2-4\rho\cos\theta+2=0$.

（I）将极坐标方程化为普通方程；

（II）若点 P(x，y)在该圆上，求 x＋y 的最大值和最小值.

6．在平面直角坐标系 xOy 中，直线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = t\cos\alpha \\ y = t\sin\alpha \end{cases}$（$t$ 为参数），曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1+\cos\theta \\ y = 1+\sin\theta \end{cases}$（$\theta$ 为参数），以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系．

（1）求曲线 C_2 的极坐标方程；

（2）若直线 C_1 与曲线 C_2 的两个交点分别为 A，B 求 $|OA|^2+|OB|^2$ 的最大值．

7．在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2+2\cos\varphi \\ y = 2\sin\varphi \end{cases}$（$\varphi$ 为参数），以原点 O 为极点，x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho = 4\sin\theta$．

（1）求曲线 C_1 的普通方程和 C_2 的直角坐标方程；

（2）已知曲线 C_3 的极坐标方程为 $\theta=\alpha(0<\alpha<\pi,\rho\in R)$，点 A 是曲线 C_3 与 C_1 的交点，点 B 是曲线 C_3 与 C_2 的交点，A，B 均异于原点 O，且 $|AB|=4\sqrt{2}$，求 α 的值．

8．在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = t\cos\alpha \\ y = t\sin\alpha \end{cases}$（$t$ 为参数），以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴的极坐标系中，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2\cos^2\theta-2\rho\sin\theta=1$．

（1）若 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$，求直线 l 以及曲线 C 的直角坐标方程；

（2）若直线 l 与曲线 C 交于 M、N 两点，且 $|MN|=6$，求直线 l 的斜率．

9．在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1：$\begin{cases} x = a(1+\sin t) \\ y = \mathrm{a}\cos t \end{cases}$（$a>0$，$t$ 为参数）．在以坐标原点为极点，x 轴的正半轴为极轴的极坐标系中，曲线 C_2：$\theta=\dfrac{\pi}{6}(\rho\in R)$．

（1）说明 C_1 是哪一种曲线，并将 C_1 的方程化为极坐标方程；

（2）若直线 C_3 的方程为 $y=-\sqrt{3}x$，设 C_2 与 C_1 的交点为 O，M，C_3 与 C_1 的交点为 O，N，若 ΔOMN 的面积为 $2\sqrt{3}$，求 a 的值．

10．在直角坐标系 xOy 中，圆 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=3+2\cos\alpha \\ y=-4+2\sin\alpha \end{cases}$（$\alpha$ 为参数）.

（1）以原点为极点、x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，求圆 C 的极坐标方程；

（2）已知 $A(-2,0)$，$B(0,2)$，圆 C 上任意一点 $M(x,y)$，求 $\triangle ABM$ 面积的最大值.

参考答案

1．（1）$(\sqrt{3},1)$，$\rho^2=\dfrac{4}{1+3\cos^2\theta}$（2）$\dfrac{16}{5}$

【解析】

【分析】

（1）由极坐标公式可得 P 的直角坐标为 $\left(\sqrt{3},1\right)$，将点 $\left(\dfrac{1}{2},\sqrt{3}\right)$ 和 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$ 代入求得 k=1，m=2，则曲线方程 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$，求得极坐标方程 $\rho^2=\dfrac{4}{1+3\cos^2\theta}$；

（2）设 $A(\rho_1,\theta)$，$B\left(\rho_2,\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$，易知 $|OA|^2=\dfrac{4}{1+3\cos^2\theta}$，$|OB|^2=\dfrac{4}{1+3\sin^2\theta}$，所以 $|OA|^2+|OB|^2=\dfrac{20}{4+\frac{9}{4}\sin^2 2\theta}$，$\sin^2 2\theta=1$ 时，$|OA|^2+|OB|^2$ 的最小值为 $\dfrac{16}{5}$.

【详解】

解：（1）点 P 的直角坐标为 $\left(\sqrt{3},1\right)$，

曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2=\dfrac{4}{1+3\cos^2\theta}$.

（2）由（1）知曲线 C：$\rho^2=\dfrac{4}{1+3\cos^2\theta}$.

由 A，B 是曲线 C 上的两个动点，且 $OA\perp OB$，

不妨设 $A(\rho_1,\theta)$，$B\left(\rho_2,\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$，且 $|OA|^2=\rho_1{}^2=\dfrac{4}{1+3\cos^2\theta}$，

$|OB|^2 = {\rho_2}^2 = \dfrac{4}{1+3\cos^2\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)} = \dfrac{4}{1+3\sin^2\theta}$.

$\therefore |OA|^2 + |OB|^2 = {\rho_1}^2 + {\rho_2}^2 = \dfrac{4}{1+3\sin^2\theta} + \dfrac{4}{1+3\cos^2\theta}$

$= \dfrac{20}{\left(1+3\sin^2\theta\right)\left(1+3\cos^2\theta\right)} = \dfrac{20}{4+\dfrac{9}{4}\sin^2 2\theta}$

$\geq \dfrac{20}{4+\dfrac{9}{4}} = \dfrac{16}{5}$.

当$\sin^2 2\theta = 1$时，$|OA|^2 + |OB|^2 = {\rho_1}^2 + {\rho_2}^2 = \dfrac{16}{5}$.

$\therefore |OA|^2 + |OB|^2$的最小值为$\dfrac{16}{5}$.

【点睛】

本题考查了参数方程与极坐标方程的综合知识，熟悉方程之间的转化以及极坐标方程的定义是解题的关键，属于中档题.

2.（1）$\rho^2 = \dfrac{9}{1+8cos^2\theta}$（2）$\dfrac{10}{9}$

【解析】

【分析】

(1)根据线性变换求出曲线C_1的参数方程,再化简成极坐标方程即可.

(2)利用极坐标的几何意义，设M（ρ_1,θ）,N（ρ_2，$\theta+\dfrac{\pi}{2}$）,再代入求$\dfrac{1}{|OM|^2}+\dfrac{1}{|ON|^2}$的值即可.

【详解】

（1）曲线C的参数方程为$\begin{cases} x = cos\alpha \\ y = sin\alpha \end{cases}$（$\alpha$为参数），

将C上每一点的横坐标保持不变,纵坐标变为原来的3倍,得曲线C_1.

转化为$\begin{cases} x = cos\alpha \\ y = 3sin\alpha \end{cases}$,整理为$x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1$,转换为极坐标方程为$\rho^2 = \dfrac{9}{1+8cos^2\theta}$.

（2）M,N为C_1上两点,若$OM \perp ON$,

设M（ρ_1,θ）,N（ρ_2，$\theta+\dfrac{\pi}{2}$），

所以$\frac{1}{{\rho_1}^2}=\frac{1+8cos^2\theta}{9}$，$\frac{1}{{\rho_2}^2}=\frac{1+8cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}{9}$，

所以$\frac{1}{|OM|^2}+\frac{1}{|ON|^2}=\frac{1+8cos^2\theta}{9}+\frac{1+8cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}{9}=\frac{10}{9}$.

【点睛】

本题主要考查了极坐标与参数方程和直角坐标的互化,同时也考查了极坐标的几何意义,属于中等题型.

3.（1）$\frac{x^2}{3}+y^2=1$，$x+y-4=0$；（2）$3\sqrt{2}$.

【解析】

试题分析：

(1)利用题意消参化为普通方程即可，利用极坐标方程与直角坐标方程的联系可得直线的直角坐标方程为C.

(2)由点到直线l的距离公式可得最小值为$\frac{8\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$

试题解析：

解：(I)由曲线C：$\{\begin{matrix} x=\sqrt{2}cos\alpha \\ y=sin\alpha \end{matrix}$ 得

即：曲线l的普通方程为：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

由曲线l：$\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=4\sqrt{2}$ 得：$\frac{\sqrt{2}}{2}\rho\left(\sin\theta+\cos\theta\right)=4\sqrt{2}$，

即：曲线l的直角坐标方程为:$x+y-8=0$

（II）由(I)知椭圆C与直线l无公共点，

椭圆上的点$P\left(\sqrt{2}\cos\alpha,\sin\alpha\right)$到直线$x+y-8=0$的距离为

$$d=\frac{\left|\sqrt{2}\cos\alpha+\sin\alpha-8\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\left|\sqrt{3}\sin\left(\alpha+\varphi\right)-8\right|}{\sqrt{2}}$$

所以当$\sin\left(\alpha+\varphi\right)=1$时，$P$的最小值为$\frac{8\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$

4．（1） $p^2-4p\cos\theta-8p\sin\theta+16=0$;（2） C_1 与 C_2 交点的极坐标为 $\left(4,\frac{\pi}{2}\right)$，和 $\left(2\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$

【解析】

【分析】

（1）先把曲线 C_1 化成直角坐标方程，再化简成极坐标方程；

（2）联立曲线 C_1 和曲线 C_2 的方程解得即可.

【详解】

(1)曲线 C_1 的直角坐标方程为：$(x-2)^2+(y-4)^2=4$，即 $x^2+y^2-4x-8y+16=0$.

$\therefore C_1$ 的参数方程化为极坐标方程为 $p^2-4p\cos\theta-8p\sin\theta+16=0$；

(2)联立 $\begin{cases} p^2-4pcos\theta-8psin\theta+16=0 \\ p=4sin\theta \end{cases}$ 可得：$\begin{cases} p=4 \\ \theta=\frac{\pi}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} p=2\sqrt{2} \\ \theta=\frac{\pi}{4} \end{cases}$，$C_1$ 与 C_2 交点的极坐标为 $\left(4,\frac{\pi}{2}\right)$，和 $\left(2\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$.

【点睛】

本题考查了参数方程，直角坐标方程，极坐标方程的互化，也考查了极坐标方程的联立，属于基础题.

5．（I）$x^2+y^2-4x+2=0$；（II）最大值 4，最小值 0

【解析】

试题分析：（1）利用互化公式 x=ρcosθ，y=ρsinθ 即可把极坐标化为直角坐标.；

（2）由 $x^2+y^2-4x+2=0$ 化为 $(x-2)^2+y^2=2$，令 $\begin{cases} x=2+\sqrt{2}cos\alpha \\ y=\sqrt{2}sin\alpha \end{cases}$，α∈[0，2π). 可得 $x+y=2+2sin(\alpha+\frac{\pi}{4})$,，利用正弦函数的单调性即可得出.

试题解析：

（I）$\rho^2=x^2+y^2$　　ρcosθ＝x，ρsinθ＝y,$\rho^2-4\rho cos\theta+2=x^2+y^2-4x+2$

∴圆的普通方程为 $x^2+y^2-4x+2=0$

（II）由$x^2+y^2-4x+2=0$ ⇒$(x-2)^2+y^2=2$　　7 分,设$\begin{cases} x=2+\sqrt{2}cos\alpha \\ y=\sqrt{2}sin\alpha \end{cases}$　(α 为参数)

$x+y=2+\sqrt{2}(cos\alpha+sin\alpha)=2+2sin(\alpha+\frac{\pi}{4})$,

所以 x＋y 的最大值 4，最小值 0

6.（1）$\rho^2-2\rho\cos\theta-2\rho\sin\theta+1=0$（2）最大值为6

【解析】

【分析】

（1）由已知曲线C_2的普通方程为$x^2+y^2-2x-2y+1=0$，利用极坐标化直角坐标的公式:$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$，即可求得答案;

（2）因为直线C_1的参数方程为$\begin{cases} x=t\cos\alpha \\ y=t\sin\alpha \end{cases}$（$t$为参数）所以直线$C_1$的极坐标方程为$\theta=\alpha$ $(\rho\in R)$. 设$A(\rho_1,\alpha)$，$B(\rho_2,\alpha)$所以ρ_1，ρ_2为方程$\rho^2-(2\cos\alpha+2\sin\alpha)\rho+1=0$的两个根，即可求得答案.

【详解】

（1）由已知曲线C_2的普通方程为$x^2+y^2-2x-2y+1=0$

$\therefore$曲线C_2的极坐标方程为：$\rho^2-2\rho\cos\theta-2\rho\sin\theta+1=0$

（2）Q 直线C_1的参数方程为$\begin{cases} x=t\cos\alpha \\ y=t\sin\alpha \end{cases}$（$t$为参数）

$\therefore$直线C_1的极坐标方程为$\theta=\alpha$ $(\rho\in R)$.

设$A(\rho_1,\alpha)$，$B(\rho_2,\alpha)$

$\therefore$ ρ_1，ρ_2为方程$\rho^2-(2\cos\alpha+2\sin\alpha)\rho+1=0$的两个根

根据韦达定理：$\rho_1+\rho_2=2\cos\alpha+2\sin\alpha$，$\rho_1\rho_2=1$

$\therefore |OA|^2+|OB|^2=\rho_1^2+\rho_2^2=(\rho_1+\rho_2)^2-2\rho_1\rho_2$

$=(2\cos\alpha+2\sin\alpha)^2-2=8\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-2$

$\therefore$当$\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=1$时，最大值为$6$.

【点睛】

本题解题关键是掌握极坐标化直角坐标的公式和极坐标的基础知识，考查了分析能力和计算能力，属于中档题.

7.（1）$\left(x-2\right)^2+y^2=4, x^2+\left(y-2\right)^2=4$；（2）$\frac{3\pi}{4}$.

【解析】

【分析】

（1）根据曲线C_1的参数方程，消去参数，即可得到C_1的普通方程；由$\rho=4\sin\theta$两边同时乘以ρ，即可得到$\rho^2=4\rho\sin\theta$，进而可得C_2的直角坐标方程；

(2)根据C_1的直角坐标方程先得到其极坐标方程，将$\theta=\alpha$分别代入C_1和C_2的极坐标方程，求出ρ_A和ρ_B，再由$|AB|=|\rho_A-\rho_B|=4\sqrt{2}$，即可求出结果.

【详解】

（1）由$\begin{cases}x=2+2cos\varphi\\y=2sin\varphi\end{cases}$消去参数$\varphi$，得$C_1$的普通方程为$\left(x-2\right)^2+y^2=4$.

由$\rho=4\sin\theta$，得$\rho^2=4\rho\sin\theta$，又$y=\rho\sin\theta$，$x^2+y^2=\rho^2$，

所以C_2的直角坐标方程为$x^2+\left(y-2\right)^2=4$.

（2）由（1）知曲线C_1的普通方程为$\left(x-2\right)^2+y^2=4$，

所以其极坐标方程为$\rho=4\cos\theta$.

设点A，B的极坐标分别为$\left(\rho_A,\alpha\right)$，$\left(\rho_B,\alpha\right)$，

则$\rho_A=4\cos\alpha$，$\rho_B=4\sin\alpha$，

所以$|AB|=|\rho_A-\rho_B|=4|\cos\alpha-\sin\alpha|=4\sqrt{2}\left|\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\right|=4\sqrt{2}$，

所以$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\pm1$，即$\alpha-\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}\left(k\in Z\right)$，

解得$\alpha=k\pi+\frac{3\pi}{4}\left(k\in Z\right)$，

又$0<\alpha<\pi$，所以$\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$.

【点睛】

本题主要考查极坐标方程与直角坐标方程的互化、以及参数方程与普通方程的互化，熟记公式即可，属于常考题型.

8.（1）$y=\sqrt{3}x$，$x^2=2y+1$（2）$\pm\sqrt{2}$

【解析】

【分析】

（1）根据α的大小消去参数t，求得直线l的直角坐标方程，利用极坐标和直角坐标转化公式，求得曲线C的直角坐标方程.（2）方法 1：写出直线l的极坐标方程，代入曲线C的极坐标方程，根据极坐标系下的弦长公式列方程由此求得直线l的斜率.方法 2：设出直线的直角坐标方程，联立直线的方程和曲线C的直角坐标方程，利用弦长公式列方程，解方程求得直线斜率.

【详解】

解：（1）由题意，直线$l:\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}t\\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$，可得直线$l$是过原点的直线，

故其直角坐标方程为$y=\sqrt{3}x$，

又$\rho^2\cos^2\theta-2\rho\sin\theta=1$，由$x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$

故$x^2=2y+1$；

（2）由题意，直线 l 的极坐标为$\theta=\alpha\left(\rho\in R\right)$，

设M、N对应的极径分别为ρ_1，ρ_2

将$\theta=\alpha\left(\rho\in R\right)$代入曲线$C$的极坐标可得：

$\rho^2\cos^2\alpha-2\rho\sin\alpha=1$，

故$\rho_1+\rho_2=\dfrac{2\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$，$\rho_1\rho_2=-\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$，

$\therefore\left|MN\right|=\left|\rho_1-\rho_2\right|=\sqrt{\left(\rho_1+\rho_2\right)^2-4\rho_1\rho_2}=\dfrac{2}{\cos^2\alpha}$，

故$\frac{2}{\cos^2\alpha}=6$，则$\cos^2\alpha=\frac{1}{3}$，即$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=\frac{2}{3}$，$\tan^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=2$，

所以$k=\tan\alpha=\pm\sqrt{2}$故直线l的斜率是$\pm\sqrt{2}$

法二：由题意，直线l方程为$y=kx$，设M、N对应的点坐标为$\left(x_1,y_1\right),\left(x_2,y_2\right)$

联立直线l与曲线C的方程$\begin{cases}y=kx\\x^2=2y+1\end{cases}$，消去$y$得$x^2-2kx-1=0$.

$x_1+x_2=2k,x_1x_2=-1$

$|MN|=\sqrt{1+k^2}\left|x_1-x_2\right|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}=2\left(1+k^2\right)=6$

所以$k=\pm\sqrt{2}$，故直线l的斜率是$\pm\sqrt{2}$.

【点睛】

本小题主要考查极坐标方程、参数方程转化为直角坐标方程，考查极坐标系下弦长的计算，考查直角坐标系下弦长的计算公式，属于中档题.

9．(1) C_1是以$(a,0)$为圆心，a为半径的圆．C_1的极坐标方程$\rho=2a\cos\theta$.(2) $a=2$

【解析】

【分析】

（1）消去参数t得到C_1的普通方程.可得C_1的轨迹.

再将$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$带入C_1的普通方程，得到C_1的极坐标方程.

（2）先得到C_3的极坐标方程，再将$\theta=\frac{\pi}{6}$，$\theta=\frac{5\pi}{3}$代入$\rho=2a\cos\theta$，解得ρ_1，ρ_2，利用三角形面积公式表示出ΔOMN的面积，进而求得 a.

【详解】

(1)由已知得：$\begin{cases}\frac{x}{a}-1=sint\\\frac{y}{a}=cost\end{cases}$平方相加消去参数$t$得到$\left(\frac{x}{a}-1\right)^2+(\frac{y}{a})^2=1$，即

$\left(x-a\right)^2+y^2=a^2$，$\therefore C_1$的普通方程：$\left(x-a\right)^2+y^2=a^2$.

$\therefore C_1$是以$\left(a,0\right)$为圆心，a为半径的圆.

再将$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$带入C_1的普通方程，得到C_1的极坐标方程$\rho=2a\cos\theta$.

（2）C_3 的极坐标方程 $\theta=\dfrac{5\pi}{3}\left(\rho\in R\right)$，

将 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$，$\theta=\dfrac{5\pi}{3}$ 代入 $\rho=2a\cos\theta$，解得 $\rho_1=\sqrt{3}a$，

$\rho_2=a$，

则 ΔOMN 的面积为 $\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}a\times a\times\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2=2\sqrt{3}$，解得 $a=2$.

【点睛】

本题考查了直角坐标系下的参数方程、普通方程与极坐标方程的互化，考查了极坐标方程的应用，属于基础题.

10．（1）$\rho^2-6\rho\cos\theta+8\rho\sin\theta+21=0$（2）$9+2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】

（1）消去参数 α，将圆 C 的参数方程，转化为普通方程，利用 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ 求得圆 C 的极坐标方程.（2）利用圆的参数方程以及点到直线的距离公式，求得 M 到直线 AB 的距离，由此求得三角形 ABM 的面积的表达式，再由三角函数最值的求法，求得三角形面积的最大值.

【详解】

解:（1）圆 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=3+2\cos\alpha\\ y=-4+2\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数），

所以其普通方程为 $\left(x-3\right)^2+\left(y+4\right)^2=4$，

所以圆 C 的极坐标方程为 $\rho^2-6\rho\cos\theta+8\rho\sin\theta+21=0$.

（2）点 $M\left(x,y\right)$ 到直线 AB：$x-y+2=0$ 的距离 $d=\dfrac{|2\cos\alpha-2\sin\alpha+9|}{\sqrt{2}}$，

故 $\triangle ABM$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times|AB|\times d=|2\cos\alpha-2\sin\alpha+9|=\left|2\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)+9\right|$，

所以 $\triangle ABM$ 面积的最大值为 $9+2\sqrt{2}$.