

隐形圆问题

在解析几何问题中,若题干中某个动点的轨迹是圆,这类问题我们称之为隐形圆问题,解题的关键是发现隐形圆,运用圆的性质来求解答. 本专题后续内容将详细归纳隐形圆常见的几类题型.

题型 1: 利用圆的定义确定隐形圆

【例 1】如果圆 $(x-2a)^2 + (y-a-3)^2 = 4$ 上总存在两个点到原点的距离为 1, 则实数 a 的取值范围为_____.

题型 2: 利用 $PA \perp PB$ 或 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$ 确定隐形圆(其中 A, B 是两定点)

【例 2】已知圆 $C: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 1$ 和两点 $A(-m, 0), B(m, 0)$, 若圆上存在点 P , 使得 $\angle APB = 90^\circ$, 则正实数 m 的取值范围为_____.

题型 3: 动点 P 满足 $\frac{PA}{PB} = \lambda (\lambda > 0 \text{ 且 } \lambda \neq 1)$ 确定隐形圆(其中 A, B 是两定点)

【例 3】在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $A(1, 0), B(4, 0)$, 若直线 $x-y+m=0$ 上存在点 P 使得 $|PA| = \frac{1}{2}|PB|$, 则实数 m 的取值范围为_____.

题型 4: 由 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \lambda$ 确定隐形圆(其中 A, B 是两定点)

【例 4】已知点 $A(2, 3), B(6, -3)$, 点 P 在直线 $3x-4y+3=0$ 上, 若满足 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} + 2\lambda = 0$ 的点 P 有两个, 则实数 λ 的取值范围为_____.

题型 5: $|PA|^2 + |PB|^2$ 是定值确定隐形圆(其中 A, B 是两定点)

【例 5】设 O 为原点, 点 $A(0, 2)$, 圆 $C: (x-a)^2 + (y-a+2)^2 = 1$, 若圆 C 上存在点 M , 满足 $|MA|^2 + |MO|^2 = 10$, 则实数 a 的取值范围为_____.

题型 6: 构造矩形解决隐形圆问题

【例 6】在平面直角坐标系 xOy 中, 已知 B, C 为圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上两点, 点 $A(1, 1)$, 且 $AB \perp AC$, 则线段 BC 的长的取值范围为_____.

专题练习:

1. 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 1$, 圆 $M: (x-a)^2 + (y-a+4)^2 = 1$, 若圆 M 上存在点 P , 过点 P 作圆 O 的两条切线, 切点为 A, B , 使得 $\angle APB = 60^\circ$, 则 a 的取值范围为_____.
2. 已知 A, B 是圆 $C_1: x^2 + y^2 = 1$ 上的动点, $AB = \sqrt{3}$, P 是圆 $C_2: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 1$ 上的动点, 则 $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}|$ 的取值范围是_____.
3. 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $l_1: kx - y + 2 = 0$ 与直线 $l_2: x + ky - 2 = 0$ 相交于点 P , 则当实数 k 变化时, 点 P 到直线 $x - y - 4 = 0$ 的距离的最大值为_____.
4. 设 $m \in \mathbf{R}$, 直线 $l_1: x + my = 0$ 与直线 $l_2: mx - y - 2m - 4 = 0$ 交于 $P(x_0, y_0)$, 则 $x_0^2 + y_0^2 + 2x_0$ 的取值范围为_____.
5. (2014 四川) 设 $m \in \mathbf{R}$, 过定点 A 的动直线 $x + my = 0$ 和过定点 B 的动直线 $mx - y - m + 3 = 0$ 交于点 $P(x, y)$, 则 $|PA| + |PB|$ 的取值范围是 ()
A. $[\sqrt{5}, 2\sqrt{5}]$ B. $[\sqrt{10}, 2\sqrt{5}]$ C. $[\sqrt{10}, 4\sqrt{5}]$ D. $[2\sqrt{5}, 4\sqrt{5}]$
6. 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 1$, 圆 $O_1: (x-4)^2 + y^2 = 4$, 动点 P 在直线 $x + \sqrt{3}y - b = 0$ 上, 过 P 作圆 O 和圆 O_1 的切线, 切点分别是 A, B , 若满足 $|PB| = 2|PA|$ 的点 P 有且仅有 2 个, 则 b 的取值范围为_____.
7. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $AB = 2$, $AC = \sqrt{2}BC$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为_____.
8. 已知圆 $C: (x-4)^2 + y^2 = 1$, 若直线 $y = kx - 2$ 上至少存在一点, 使得以该点为圆心, 1 为半径的圆与圆 C 有公共点, 则实数 k 的最大值是_____.
9. 已知圆 $O: x^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$, 直线 $x + y = 4$ 与坐标轴分别交于 A, B 两点, 若圆 O 上存在点 P 使 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 1$, 则 r 的取值范围为_____.
10. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $a^2 + b^2 + 2c^2 = 8$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为_____.
11. 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 16$, 点 $P(1, 2)$, M, N 为圆 O 上两个不同的点, 且 $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = 0$, 若 $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}$, 则 $|\overrightarrow{PQ}|$ 的最小值为_____.
12. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知两个圆 $x^2 + y^2 = 4$ 和 $x^2 + y^2 = 9$, 定点 $P(1, 0)$, 动点 A, B 分别在两个圆上, 满足 $\angle APB = 90^\circ$, 则 $|AB|$ 的取值范围为_____.