

### 导数压轴小题练习

1. 【图像法】 设函数  $f(x) = e^x(2x-1) - ax + a$ , 其中  $a < 1$ , 若存在唯一的整数  $x_0$  使得  $f(x_0) < 0$ , 则  $a$  的取值范围是 ( )  
 A.  $[-\frac{3}{2e}, 1)$       B.  $[-\frac{3}{2e}, \frac{3}{4})$       C.  $[\frac{3}{2e}, \frac{3}{4})$       D.  $[\frac{3}{2e}, 1)$
2. 【图像法】 已知函数  $f(x) = xe^x - mx + m$ , 若  $f(x) < 0$  的解集为  $(a, b)$ , 其中  $b < 0$ ; 不等式在  $(a, b)$  中有且只有一个整数解, 则实数  $m$  的取值范围是 ( )  
 A.  $(\frac{2}{3e^2}, \frac{1}{2e})$       B.  $(\frac{2}{3e^2}, \frac{1}{e})$       C.  $[\frac{2}{3e^2}, \frac{1}{2e})$       D.  $[\frac{2}{3e^2}, \frac{1}{e})$
3. 【切线应用】 若函数  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx (a, b \in R)$  的图象与  $x$  轴相切于一点  $A(m, 0) (m \neq 0)$ , 且  $f(x)$  的极大值为  $\frac{1}{2}$ , 则  $m$  的值为     ▲    .
4. 【导数的切线法】 设函数  $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2ax (a > 0)$  与  $g(x) = a^2 \ln x + b$  有公共点, 且在公共点处的切线方程相同, 则实数  $b$  的最大值为 ( )  
 A.  $\frac{1}{2e}$       B.  $\frac{1}{2}e^2$       C.  $\frac{1}{e}$       D.  $-\frac{3}{2e}$
5. 【导数的切线法】 若对于函数  $f(x) = \ln(x+1) + x^2$  图象上任意一点处的切线  $l_1$ , 在函数  $g(x) = a \sin x \cos x - x$  的图象上总存在一条切线  $l_2$ , 使得  $l_1 \perp l_2$ , 则实数  $a$  的取值范围为 ( )  
 A.  $[\frac{\sqrt{2}-1}{2}, 1]$       B.  $[-1, \frac{1-\sqrt{2}}{2}]$   
 C.  $(-\infty, \frac{1-\sqrt{2}}{2}] \cup [\frac{\sqrt{2}-1}{2}, +\infty)$       D.  $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
6. 【导数的切线法】 已知实数  $a, b$  满足  $\ln(b+1) + a - 3b = 0$ , 实数  $c, d$  满足  $2d - c - \sqrt{5} = 0$ , 则  $(a-c)^2 + (b-d)^2$  的最小值为 ( )  
 A. 1      B. 2      C. 3      D. 4
7. 【导数的切线法】 若直线  $kx - y - k + 1 = 0 (x \in R)$  和曲线  $E: y = ax^3 + bx^2 + \frac{5}{3} (ab \neq 0)$  的图像交于  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3) (x_1 < x_2 < x_3)$  三点时, 曲线  $E$  在点  $A$ , 点  $C$  处的切线总是平行, 则过点  $(b, a)$  可作曲线  $E$  的 ( ) 条切线.  
 A. 0      B. 1      C. 2      D. 3
8. 【导数的直接应用】 若是定义在  $R$  上的可导函数, 且满足  $(x-1)f'(x) \geq 0$ , 则必有 ( )  
 A.  $f(0) + f(2) < 2f(1)$       B.  $f(0) + f(2) > 2f(1)$   
 C.  $f(0) + f(2) \leq 2f(1)$       D.  $f(0) + f(2) \geq 2f(1)$
9. 【导数的直接应用】 若函数  $f(x) = e^x(\sin x + a \cos x)$  在  $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$  上单调递增, 则实数  $a$  的取值范围是 ( )  
 A.  $(-\infty, 1]$       B.  $(-\infty, 1)$       C.  $[1, +\infty)$       D.  $(1, +\infty)$
10. 【利用对称中心破题】 已知函数  $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$ , 则  $\sum_{k=1}^{2016} f(\frac{k}{2017})$  的值为 ( )  
 A. 0      B. 504      C. 1008      D. 2016
11. 【利用对称中心破题】 已知函数  $f(x) = \frac{x}{2x-1} + \cos(x - \frac{\pi+1}{2})$ , 则  $\sum_{k=1}^{2016} f(\frac{k}{2017})$  的值为 ( )  
 A. 2016      B. 1008      C. 504      D. 0

- 12.【利用对称中心破题】已知函数  $f(x) = \frac{(x+1)^2 + \ln(\sqrt{1+9x^2} - 3x)\cos x}{x^2+1}$ , 且  $f(2017) = 2016$ , 则  $f(-2017) = ( \quad )$   
 A. -2014                      B. -2015                      C. -2016                      D. -2017
- 13.【利用对称中心破题】已知函数  $f(x) = \ln x - x^2$  与  $g(x) = (x-2)^2 + \frac{1}{2(2-x)} - m (m \in R)$  的图象上存在关于  $(1, 0)$  对称的点, 则实数  $m$  的取值范围是  $( \quad )$   
 A.  $(-\infty, 1 - \ln 2)$       B.  $(-\infty, 1 - \ln 2]$       C.  $(1 - \ln 2, +\infty)$       D.  $[1 - \ln 2, +\infty)$
- 14.【通过构造函数破题】已知函数  $f(x) = e^x + m \ln x$  ( $m \in R, e$  为自然对数的底数), 若对任意的正数  $x_1, x_2$ , 当  $x_1 > x_2$  时, 都有  $f(x_1) - f(x_2) > x_1 - x_2$  恒成立, 则实数  $m$  的取值范围为         ▲
- 15.【通过构造函数破题】已知函数  $f(x) = a \ln(x+1) - x^2$ , 在区间  $(0, 1)$  内任取两个实数  $p, q$ , 且  $p < q$ , 若不等式  $\frac{f(p+1) - f(q+1)}{p - q} > 1$  恒成立, 则实数  $a$  的取值范围是  $( \quad )$   
 A.  $15, +\infty)$               B.  $[15, +\infty)$               C.  $(-\infty, 6)$               D.  $(-\infty, 6]$
- 16.【直接法】已知直线  $l$  与函数  $f(x) = \ln(\sqrt{ex}) - \ln(1-x)$  的图象交于  $A, B$  两点, 若  $AB$  中点为  $P(\frac{1}{2}, m)$ , 则  $m$  的大小为  $( \quad )$   
 A.  $\frac{1}{3}$                           B.  $\frac{1}{2}$                           C. 1                          D. 2
- 17.【函数性质+K法】已知函数  $f(x) = x + \sin x (x \in R)$ , 且  $f(y^2 - 2y + 3) + f(x^2 - 4x + 1) \leq 0$ , 则当  $y \geq 1$  时,  $\frac{y}{x+1}$  的取值范围是  $( \quad )$   
 A.  $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$                   B.  $[0, \frac{3}{4}]$                   C.  $[\frac{1}{4}, \frac{4}{3}]$                   D.  $[0, \frac{4}{3}]$
- 18.【考查函数性质】已知函数  $f(x) = x^2 + (a+8)x + a^2 + a - 12 (a < 0)$ , 且  $f(a^2 - 4) = f(2a - 8)$ , 则  $\frac{f(n) - 4a}{n+1} (n \in N^*)$  的最小值为  $( \quad )$   
 A.  $\frac{37}{4}$                           B.  $\frac{35}{8}$                           C.  $\frac{28}{3}$                           D.  $\frac{27}{4}$
- 19.【分离参数法+隐含零点】已知函数  $f(x) = x + x \ln x$ , 若  $k \in Z$ , 并且  $k(x-1) < f(x)$  对任意的  $x > 1$  恒成立, 则  $k$  的最大值为  $( \quad )$   
 A. 2                          B. 3                          C. 4                          D. 5
- 20.【考查函数的零点+嵌套函数】已知函数  $f(x) = \begin{cases} |\log_5(1-x)|, & x < 1 \\ -(x-2)^2 + 2, & x \geq 1 \end{cases}$ , 则方程  $f(x + \frac{1}{x} - 2) = a$  的实根个数不可能为  $( \quad )$   
 A. 8个                          B. 7个                          C. 6个                          D. 5个
- 21.【考查函数的零点】定义在  $R$  上的偶函数  $f(x)$  满足  $f(2-x) = f(x)$ , 且当  $x \in [1, 2]$  时,  $f(x) = \ln x - x + 1$ , 若函数  $g(x) = f(x) + mx$  有 7 个零点, 则实数  $m$  的取值范围为  $( \quad )$   
 A.  $(\frac{1-\ln 2}{8}, \frac{1-\ln 2}{6}) \cup (\frac{\ln 2 - 1}{6}, \frac{\ln 2 - 1}{8})$       B.  $(\frac{\ln 2 - 1}{6}, \frac{\ln 2 - 1}{8})$   
 C.  $(\frac{1-\ln 2}{8}, \frac{1-\ln 2}{6})$                       D.  $(\frac{1-\ln 2}{8}, \frac{\ln 2 - 1}{6})$
- 22.【考查函数的零点】设函数  $f(x) = \begin{cases} 1 + \cos \frac{\pi x}{2}, & x > 1 \\ x^2, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$ , 函数  $g(x) = x + \frac{1}{x} + a (x > 0)$ , 若存在唯一的  $x_0$ , 使得  $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$  的最小值为  $h(x_0)$ , 则实数  $a$  的取值范围是  $( \quad )$   
 A.  $a < -2$                       B.  $a \leq -2$                       C.  $a < -1$                       D.  $a \leq -1$

- 23.【考查函数的零点】已知函数  $f(x) = \frac{e^x}{x} - kx$  ( $e$  为自然对数的底数) 有且只有一个零点, 则实数  $k$  的取值范围是( )
- A.  $(0, 2)$                       B.  $(0, \frac{e^2}{4})$                       C.  $(0, e)$                       D.  $(0, +\infty)$
- 24.【转化法+零点】已知函数  $f(x) = a \ln x + x^2 + (a-6)x$  在  $(0, 3)$  上不是单调函数, 则实数  $a$  的取值范围是         ▲
- 25.【图像法+转化法+零点】函数  $f(x) = \begin{cases} \ln x (x > 0) \\ -\sqrt{-x} (x \leq 0) \end{cases}$  与  $g(x) = \frac{1}{2}(|x+a|+1)$  的图象上存在关于  $y$  轴对称的点, 则实数  $a$  的取值范围是( )
- A.  $(-\infty, 3-2\ln 2]$       B.  $[3-2\ln 2, +\infty)$       C.  $[\sqrt{e}, +\infty)$                       D.  $(-\infty, -\sqrt{e}]$
- 26.【多变量转化+等与不等转化】已知函数  $f(x) = \ln x, g(x) = (2m+3)x+n$ , 若对任意的  $x \in (0, +\infty)$ , 总有  $f(x) \leq g(x)$  恒成立, 记  $(2m+3)n$  的最小值为  $f(m, n)$ , 则  $f(m, n)$  最大值为( )
- A. 1                      B.  $\frac{1}{e}$                       C.  $\frac{1}{e^2}$                       D.  $\frac{1}{\sqrt{e}}$
- 27.【多变量转化+等与不等转化】已知不等式  $e^x - (a+2)x \geq b-2$  恒成立, 则  $\frac{b-5}{a+1}$  的最大值为( )
- A.  $-\ln 3$                       B.  $-\ln 2$                       C.  $-1 - \ln 3$                       D.  $-1 - \ln 2$
- 28.【多变量转化+等与不等转化】对于任意  $b > 0, a \in R$ , 不等式  $[b - (a-2)]^2 + [\ln b - (a-1)]^2 \geq m^2 - m$  恒成立, 则实数  $m$  的最大值为( )
- A.  $\sqrt{e}$                       B. 2                      C.  $e$                       D. 3
- 29.【嵌套函数+零点图像法】函数  $f(x) = \begin{cases} |\log_2 |4x-1|| & x \neq 4 \\ 0 & x = \frac{1}{4} \end{cases}$ . 若方程  $af^2(x) + bf(x) + c = 0$  有 8 个不同的实根, 则此 8 个实根之和是( )
- A.  $\frac{5}{2}$                       B. 4                      C.  $\frac{11}{4}$                       D. 2
- 30.【嵌套函数法】已知函数  $f(x) = \begin{cases} 2e^{x-1}, x < 1 \\ x^3 + x, x \geq 1 \end{cases}$ , 则  $f(f(x)) < 2$  的解集为( )
- A.  $(1 - \ln 2, +\infty)$       B.  $(+\infty, 1 - \ln 2)$       C.  $(1 - \ln 2, 1)$                       D.  $(1, 1 + \ln 2)$
- 31.【导数+嵌套函数法+分离参数】函数  $f(x) = -x^2 + 3x + a, g(x) = 2^x - x^2$ , 若  $f[g(x)] \geq 0$  对  $x \in [0, 1]$  恒成立, 则实数  $a$  的取值范围是( )
- A.  $[-e, +\infty)$                       B.  $[-\ln 2, +\infty)$                       C.  $[-2, +\infty)$                       D.  $(-\frac{1}{2}, 0]$
- 32.【导数+嵌套函数法+定义域与值域的关系】已知函数  $f(x) = e^x + a \cdot e^{-x} + 2$  ( $a \in R, e$  为自然对数的底数), 若  $y = f(x)$  与  $y = f(f(x))$  的值域相同, 则  $a$  的取值范围是( )
- A.  $a < 0$                       B.  $a \leq -1$                       C.  $0 < a \leq 4$                       D.  $a < 0$  或  $0 < a \leq 4$
- 33.【导数+嵌套函数法+分离参数】已知函数  $f(x) = \frac{1}{e} \cdot e^x + \frac{a}{2}x^2 - (a+1)x + a$  ( $a > 0$ ), 其中  $e$  为自然对数的底数. 若函数  $y = f(x)$  与  $y = f[f(x)]$  有相同的值域, 则实数  $a$  的最大值为( )
- A.  $e$                       B. 2                      C. 1                      D.  $\frac{e}{2}$
- 34.【导数+嵌套函数法+导函数零点】已知函数  $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx + c$  有两个极值点  $x_1, x_2$ , 若  $x_1 < f(x_1) < x_2$ , 则关于  $x$  方程  $(f(x))^2 - 2af(x) - b = 0$  的实根个数不可能为( )
- A. 2                      B. 3                      C. 4                      D. 5

- 35.【导数+嵌套函数法+导函数零点】已知函数 $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx + c$ 有两个极值点 $x_1, x_2$ , 若, 则关于 $x$ 方程 $(f(x))^2 - 2af(x) - b = 0$ 的实根个数为( )
- A. . 2                      B. . 3                      C. 4                      D. 5
- 36.【嵌套函数法+零点】已知偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x+4) = f(4-x)$ , 且当 $x \in (0, 4]$ 时,  $f(x) = \frac{\ln(2x)}{x}$ , 关于 $x$ 的不等式 $f^2(x) + af(x) > 0$ 在 $[-200, 200]$ 上有且只有300个整数解, 则实数 $a$ 的取值范围是( )
- A.  $(-\ln 2, -\frac{1}{3}\ln 6)$     B.  $(-\ln 2, -\frac{1}{3}\ln 6]$     C.  $(-\frac{1}{3}\ln 6, -\frac{3\ln 2}{4})$     D.  $(-\frac{1}{3}\ln 6, -\frac{3\ln 2}{4}]$
- 37.【导数极值点常规处理手段-转化法】已知函数 $f(x) = x \ln x - ae^x$  ( $e$ 为自然对数的底数)有两个极值点, 则实数 $a$ 的取值范围是( )
- A.  $(0, \frac{1}{e})$                       B.  $(0, e)$                       C.  $(\frac{1}{e}, e)$                       D.  $(-\infty, e)$
- 38.【分析法】已知函数 $f(x) = e^x - ax - 1, g(x) = \ln x - ax - a$ , 若存在 $x_0 \in (1, 2)$ , 使得 $f(x_0)g(x_0) < 0$ , 则实数 $a$ 的取值范围为( )
- A.  $(\ln 2, \frac{e^2-1}{2})$                       B.  $(\ln 2, e-1)$                       C.  $[1, e-1)$                       D.  $[1, \frac{e^2-1}{2})$
- 39.【导函数构造法】设 $f(x)$ 定义在 $R$ 上的可导函数, 若 $f(3) = 1$ , 且 $3f'(x) + xf'(x) > \ln(x+1)$ , 则不等式 $(x-2017)^3 f(x-2017) - 27 > 0$ 的解集为( )
- A.  $(2014, +\infty)$                       B.  $(0, 2014)$                       C.  $(0, 2020)$                       D.  $(2020, +\infty)$
- 40.【导函数2次构造法】已知 $f(x)$ 是定义在 $R$ 上的可导函数, 且满足 $(x+2)f(x) + xf'(x) > 0$ , 则( )
- A.  $f(x) > 0$                       B.  $f(x) < 0$                       C.  $f(x)$ 为减函数                      D.  $f(x)$ 为增函数
- 41.【导函数2次构造法】定义在 $R$ 上的函数 $f(x)$ 满足:  $f'(x) - f(x) = x \cdot e^x$ , 且 $f(0) = \frac{1}{2}$ , 则 $\frac{f'(x)}{f(x)}$ 的最大值为( )
- A. 0                      B.  $\frac{1}{2}$                       C. 1                      D. 2
- 42.【导函数构造法】设函数 $f(x)$ 满足 $2x^2 f(x) + x^3 f'(x) = e^x$ ,  $f(2) = \frac{e^2}{8}$ , 则 $x \in [2, +\infty)$ 时,  $f(x)$ 的最小值为( )
- A.  $\frac{e^2}{2}$                       B.  $\frac{3e^2}{2}$                       C.  $\frac{e^2}{4}$                       D.  $\frac{e^2}{8}$
- 43.【导函数构造法】已知函数 $f(x)$ 是定义在 $R$ 上的奇函数, 其导函数为 $f'(x)$ , 若对任意的正实数 $x$ , 都有 $xf'(x) + 2f(x) > 0$ 恒成立, 且 $f(\sqrt{2}) = 1$ , 则使 $x^2 f(x) < 2$ 成立的实数 $x$ 的集合为( )
- A.  $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$                       B.  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$   
C.  $(-\infty, \sqrt{2})$                       D.  $(\sqrt{2}, +\infty)$
44. 已知函数 $f(x)$ 为 $R$ 上的可导函数, 其导函数为 $f'(x)$ , 且满足 $f(x) + f'(x) < 1$ 恒成立,  $f(0) = 2018$ , 则不等式 $f(x) < 2017e^{-x} + 1$ 的解集为( )
- A.  $f(x) = x - \sin x$                       B.  $f(a-2) + f(a^2) \geq 0$   
C.  $f(x) = ax + \ln x - \frac{x^2}{x - \ln x}$                       D.  $f(x) = x^3 + x$
- 45.【导函数构造法】已知定义在 $f(x) = x^3 + x$ 上的可导函数 $f(a-2) + f(a^2) \geq 0$ 的导函数为 $f'(x)$ , 对任意实数 $x$ 均有 $(1-x)f(x) + xf'(x) > 0$ 成立, 且 $y = f(x+1) - e$ 是奇函数, 则不等式 $xf(x) - e^x > 0$ 的解集是( )
- A.  $(-\infty, e)$                       B.  $(e, +\infty)$                       C.  $(-\infty, 1)$                       D.  $(1, +\infty)$

46.【导函数构造法】已知定义域为  $R$  的函数的导函数为  $f'(x)$ , 并且满足  $f'(x) > f(x) + 1$ , 则下列正确的是 ( )

- A.  $f(2018) - ef(2017) > e - 1$                       B.  $f(2018) - ef(2017) < e - 1$   
 C.  $f(2018) - ef(2017) > e + 1$                       D.  $f(2018) - ef(2017) < e + 1$

47.(50)16【导函数类极值零点最值】.关于  $x$  的方程  $(k-7)^2 + 4\ln x - \frac{1}{x^2} + k = 0$  有两个不等实根, 则实数  $k$  的取值范围是     ▲    

48.【导函数类极值零点最值】已知函数  $f(x) = x(\ln x - ax)$  有极值, 则实数  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $(-\infty, \frac{1}{2})$                       B.  $(0, \frac{1}{2})$                       C.  $(-\infty, \frac{1}{2}]$                       D.  $(0, \frac{1}{2}]$

49.【导函数类极值零点最值】已知函数  $f(x) = e^{2x} - ax^2 + bx - 1$ , 其中  $a, b \in R, e$  为自然对数的底数.若  $f(1) = 0, f'(x)$  是  $f(x)$  的导函数, 函数  $f'(x)$  在区间  $(0, 1)$  内有两个零点, 则  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $(e^2 - 3, e^2 + 1)$                       B.  $(e^2 - 3, +\infty)$                       C.  $(-\infty, 2e^2 + 2)$                       D.  $(2e^2 - 6, 2e^2 + 2)$

50.【导函数类极值零点最值】已知  $a \in R$ , 若  $f(x) = (\frac{1}{x} + a)e^x$  在区间  $(0, 1)$  上有且只有一个极值点, 则  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $a < 0$                       B.  $a > 0$                       C.  $a \leq 1$                       D.  $a \geq 0$

51.【分析结构+换元法】若存在正实数  $m$ , 使得关于  $x$  的方程  $x + a(2x + 2m - 4ex)[\ln(x+m) - \ln x] = 0$  有两个不同的根, 其中  $e$  为自然对数的底数, 则实数  $a$  的取值范围是 ( D )

- A.  $(-\infty, 0)$                       B.  $(0, \frac{1}{2e})$   
 C.  $(-\infty, 0) \cup (\frac{1}{2e}, +\infty)$                       D.  $(\frac{1}{2e}, +\infty)$

52.【函数性质+单调性】定义在  $x \in R$  上的函数  $f(x)$  在  $(-\infty, -2)$  上单调递增, 且  $f(x-2)$  是偶函数, 若对一切实数  $x$ , 不等式  $f(2\sin x - 2) > f(\sin x - 1 - m)$  恒成立, 则实数  $m$  的取值范围为     ▲    

53.【函数性质法-单调性+奇偶性】已知函数  $f(x) = \begin{cases} x\ln(1+x) + x^2, & x \geq 0 \\ -x\ln(1-x) + x^2, & x < 0 \end{cases}$ , 若  $f(-a) + f(a) \leq 2$

$f(x)$ , 则实数的取值范围是 ( )

- A.  $(-\infty, 1] \cup [1, +\infty)$                       B.  $[-1, 0]$                       C.  $[0, 1]$                       D.  $[-1, 1]$

54.【函数性质法】已知函数  $f(x)$  是偶函数,  $f(x)$  是奇函数, 且对于任意  $x_1, x_2 \in [0, 1]$ , 且  $x_1 \neq x_2$ , 都有  $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f'(x_2)] < 0$ , 设  $a = f(\frac{82}{11}), b = f(\frac{50}{9}), c = f(\frac{24}{7})$  则下列结论正确的是 ( )

- A.  $a > b > c$                       B.  $b > a > c$                       C.  $b > c > a$                       D.  $c > a > b$

55.【函数性质-周期函数法】设函数  $f_{(0)}(x) = \sin x$ , 定义  $f_{(1)}(x) = f'[f_{(0)}(x)], f_{(2)}(x) = f'[f_{(1)}(x)], \dots, f_{(n)}(x) = f'[f_{(n-1)}(x)]$ , 则  $f_{(1)}(15^\circ) + f_{(2)}(15^\circ) + f_{(3)}(15^\circ) + \dots + f_{(2017)}(15^\circ)$  的值是 ( )

- A.  $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$                       B.  $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$                       C. 0                      D. 1

56.【函数性质-周期函数法】若函数  $y = f(x), x \in M$  对于给定的非零实数  $a$ , 总存在非零常数  $T$ , 使得定义域  $M$  内的任意实数  $x$ , 都有  $af(x) = f(x+T)$  恒成立, 此时  $T$  为  $f(x)$  的假周期, 函数  $f(x)$  是  $M$  上的  $a$  级假周期函数. 若函数  $f(x)$  是定义在区间  $[0, +\infty)$  内的 3 级假周期且  $T = 2$ , 当  $x \in [0, 2)$ , 有:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - 2x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ f(2-x) & 1 < x < 2 \end{cases},$$

函数  $g(x) = -2\ln x + \frac{1}{2}x^2 + x + m$ , 若  $\exists x_1 \in [6, 8], \exists x_2 \in (0, +\infty)$  使  $g(x_2) - f(x_1) \leq 0$  成立, 则实数  $m$

的取值范围是( )

- A.  $(-\infty, \frac{13}{2}]$       B.  $(-\infty, 12]$       C.  $(-\infty, 39]$       D.  $[12, +\infty)$

57.【图像法+零点】已知  $f(x) = \begin{cases} e^x + ax, & x > 0 \\ \frac{1}{e^x} - ax, & x < 0 \end{cases}$ , 若函数  $f(x)$  有四个零点, 则实数  $a$  的取值范围是( )

- A.  $(-\infty, -\frac{1}{e})$       B.  $(-\infty, -e)$       C.  $(e, +\infty)$       D.  $(\frac{1}{e}, +\infty)$

58.【图像法+零点】已知函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x} + 1, & x \geq 0 \\ x^2 + 2x + 1, & x < 0 \end{cases}$ , 若函数  $y = f(f(x) - a) - 1$  有三个零点, 则实数  $a$  的取值范围是( B )

- A.  $(1, 1 + \frac{1}{e}) \cup (2, 3]$       B.  $(1, 1 + \frac{1}{e}) \cup (2, 3] \cup \{3 + \frac{1}{e}\}$   
 C.  $(1, 1 + \frac{1}{e}) \cup [2, 3) \cup \{3 + \frac{1}{e}\}$       D.  $(1, 1 + \frac{2}{e}) \cup (2, 3]$

59.【导数+零点】若函数  $f(x) = ax + \ln x - \frac{x^2}{x - \ln x}$  有三个不同的零点, 则实数  $a$  的取值范围是( )

- A.  $(1, \frac{e}{e-1} - \frac{1}{e})$       B.  $[1, \frac{e}{e-1} - \frac{1}{e}]$       C.  $(\frac{1}{e} - \frac{e}{e-1}, -1)$       D.  $[\frac{1}{e} - \frac{e}{e-1}, -1]$

60.【零点】已知关于的方程  $x^2 e^x + t - a = 0$ ,  $x \in [-1, 1]$ , 若对任意的  $t \in [1, 3]$ , 该方程总存在唯一的实数解, 则实数  $a$  的取值范围是( )

- A.  $(2 + \frac{1}{e}, e + 1]$       B.  $(\frac{1}{e} + 3, e + 1]$       C.  $[1 + \frac{1}{e}, e]$       D.  $[1, e]$

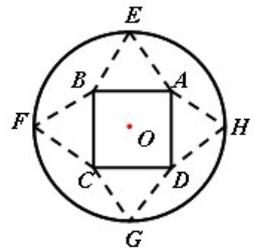
61.【零点】已知当  $x \in (1, +\infty)$  时, 关于  $x$  的方程  $\frac{x \ln x + (2-k)x}{k} = -1$  有唯一实数解, 则  $k$  的范围为( )

- A.  $(3, 4)$       B.  $(4, 5)$       C.  $(5, 6)$       D.  $(6, 7)$

62.【考查三次函数值域】已知函数  $f(x) = (x-a)^3 - 3x + a$  ( $a > 0$ ) 在  $[-1, b]$  上的值域为  $[-2-2a, 0]$ , 则  $b$  的取值范围是( )

- A.  $[0, 3]$       B.  $[0, 2]$       C.  $[2, 3]$       D.  $(-1, 3]$

63.【外接球与内切球】如图, 圆形纸片的圆心为  $O$ , 半径为 6 cm, 该纸片上的正方形  $ABCD$  的中心为  $O$ .  $E, F, G, H$  为圆  $O$  上的点,  $\triangle ABE, \triangle BCF, \triangle CDG, \triangle ADH$  分别是以  $AB, BC, CD, DA$  为底边的等腰三角形, 沿虚线剪开后, 分别以  $AB, BC, CD, DA$  为折痕折起  $\triangle ABE, \triangle BCF, \triangle CDG, \triangle ADH$ , 使得  $E, F, G, H$  重合, 得到一个四棱锥, 当该四棱锥的侧面积是底面积的 2 倍时, 该四棱锥的外接球的体积为                      ▲



64.【导数法】设函数  $f(x) = e^x - 3x$ , 则关于函数  $y = f(x)$  说法错误的是( )

- A. 在区间  $(0, 1), (1, +\infty)$  内均有零点      B. 与  $y = \ln x$  的图象有两个交点  
 C.  $\forall x_1 \in R, \exists x_2 \in R$  使得  $f(x)$  在  $x = x_1, x = x_2$  处的切线互相垂直      D.  $f(x) \geq -1$  恒成立

65.【极值点偏移】已知函数  $y = e^x - ax$  有两个零点  $x_1, x_2, x_1 < x_2$ , 则下面说法正确的是( )

- A.  $x_1 + x_2 < 2$       B.  $a < e$   
 C.  $x_1 x_2 > 1$       D. 有极小值点  $x_0$ , 且  $x_1 + x_2 < 2x_0$

66.【恒成立-分离参数法】已知函数  $f(x) = ax + x \ln x$  ( $a \in R$ ) 的图像在点  $x = \frac{1}{e}$  处的切线斜率为 1, 当  $k \in Z$  时, 不等式  $f(x) - kx + k$  在  $x \in (1, +\infty)$  上恒成立, 则  $k$  的最大值是( C )

- A. 1      B. 2      C. 3      D. 4

67. 已知函数  $f(x) = ax, g(x) = \ln x$ , 存在  $t \in (0, e]$ , 使得  $f(t) - g(t)$  最小值为 3, 则函数  $g(x) = \ln x$  图象上一点  $P$  到函数  $f(x) = ax$  图象上一点  $Q$  的最短距离为 ( )

- A.  $\frac{1}{e}$                       B.  $\sqrt{5}$                       C.  $2\sqrt{2}$                       D. 3

68. 【存在与任意】 设函数  $f(x) = x^2 - x \ln x + 2$ , 若存在区间  $[a, b] \subseteq \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ , 使  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的值域为  $[k(a+2), k(b+2)]$ , 则  $k$  的取值范围是 ( )

- A.  $\left(1, \frac{9+2\ln 2}{4}\right)$                       B.  $\left[1, \frac{9+2\ln 2}{4}\right]$                       C.  $\left(1, \frac{9+2\ln 2}{10}\right)$                       D.  $\left[1, \frac{9+2\ln 2}{10}\right]$

69. 【存在与任意】 已知函数  $f(x) = \frac{\ln x}{x}, g(x) = -ex^2 + ax$  ( $e$  是自然对数的底数), 对任意的  $x_1 \in \mathbb{R}$ , 存在  $x_2 \in \left[\frac{1}{3}, 2\right]$ , 有  $f(x_1) \leq g(x_2)$ , 则  $a$  的取值范围为         ▲        

70. 【导数综合】 已知函数  $f(x) = \sin x - x \cos x$ , 现有下列结论:

- ① 当  $x \in [0, \pi]$  时,  $f(x) \geq 0$ ; ② 当  $0 < \alpha < \beta < \pi$  时,  $\alpha \cdot \sin \beta > \beta \cdot \sin \alpha$ ;  
 ③ 若  $n < \frac{\sin x}{x} < m$  对  $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$  恒成立, 则  $m - n$  的最小值等于  $1 - \frac{2}{\pi}$ ;  
 ④ 已知  $k \in [0, 1]$ , 当  $x_i \in (0, 2\pi)$  时, 满足  $\frac{|\sin x_i|}{x_i} = k$  的  $x_i$  的个数记为  $n$ , 则  $n$  的所有可能取值构成的集合为  $\{0, 1, 2, 3\}$ .

其中正确的个数为 ( )

- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4

71. (105)12 【导数+隐含零点】 已知函数  $f(x) = x \ln x + \frac{1}{2}x^2, x_0$  是函数  $f(x)$  的极值点。给出以下几个命题:

- ①  $0 < x_0 < \frac{1}{e}$ ; ②  $x_0 > \frac{1}{e}$ ; ③  $f(x_0) + x_0 < 0$ ; ④  $f(x_0) + x_0 > 0$ . 其中正确的命题是         ▲

72. 设  $x = 1$  是函数  $f(x) = a_{n+1}x^3 - a_n x^2 - a_{n+2}x + 1 (n \in \mathbb{N}_+)$  的极值点, 数列  $\{a_n\}$  中满足  $a_1 = 1, a_2 = 2, b_n = \log_2 a_{n+1}$ , 若  $[x]$  表示不超过  $x$  的最大整数, 则  $\left[\frac{2018}{b_1 b_2} + \frac{2018}{b_2 b_3} + \dots + \frac{2018}{b_{2018} b_{2019}}\right] = ( )$

- A. 2017                      B. 2018                      C. 2019                      D. 2020