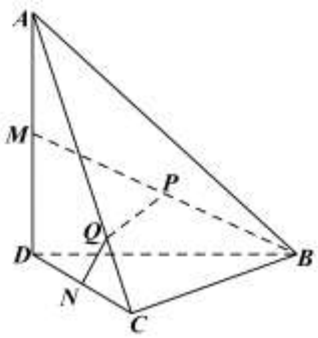
立体几何（证明平行、垂直）

1．如图，四面体 $ABCD$ 中，$BC=CD$，$\angle BCD=90^\circ$，$AD\perp$平面 BCD．M 为 AD 中点，P 为 BM 中点，点 Q 在线段 AC 上，且 $AQ=3QC$．

（1）求证：$PQ//$平面 BCD；

（2）若 $AD=DC$，N 是 CD 的中点，求证：$NQ\perp$平面 ABC．

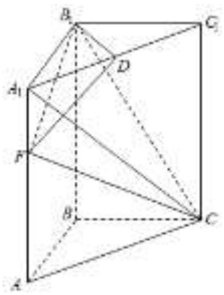


2．（向量法）如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，底面是等腰直角三角形，

$AB=BC=\sqrt{2}$，$BB_1=3$，D 为 A_1C_1 的中点，F 在线段 AA_1 上．

（1）AF 为何值时，$CF\perp$平面 B_1DF？

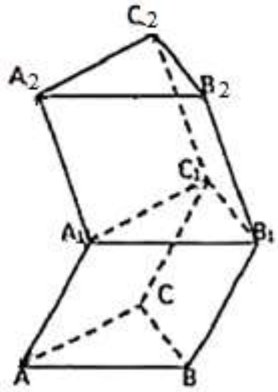
（2）设 $AF=1$，求平面 B_1CF 与平面 ABC 所成的锐二面角的余弦值．



3．如图所示的几何体由斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 和 $A_2B_2C_2-A_1B_1C_1$ 组成，满足：平行四边形 ABB_1A_1 与 $A_2B_2B_1A_1$ 、平行四边形 BCC_1B_1 与 $B_2C_2C_1B_1$ 、平行四边形 CAA_1C_1 与 $C_2A_2A_1C_1$ 分别全等，且点 T 为 AA_2 的中点．

（Ⅰ）若 A_1 、 C_1 、 T 三点不共线，求证： $AA_2\perp$ 面 A_1C_1T ；

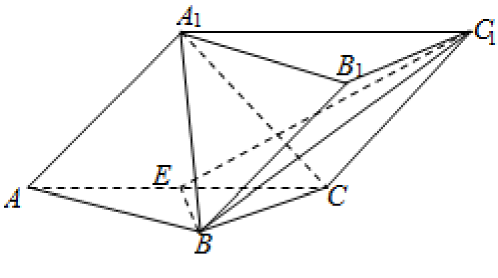
（Ⅱ）若 $AB=AC=AA_1$ ，面 $AA_1B\perp$ 面 ABC ，侧棱 AA_1 和底面 ABC 所成的角是 $60°$ ，求证：面 $A_1B_2C_2$ // 面 BCC_1B_1 ．



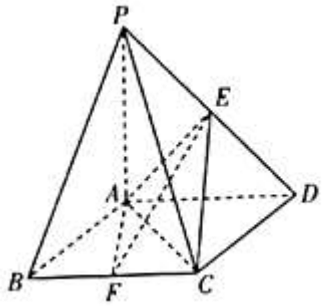
4．如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，平面 $A_1ACC_1\perp$ 平面 ABC，$AB=BC=2$，$\angle ACB=30°$，$AA_1=3$，$BC_1\perp A_1C$，E 为 AC 的中点．

（1）求证：AB_1∥平面 C_1EB；

（2）求证：$A_1C\perp$ 平面 C_1EB.



5．如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，$PB=PD=3\sqrt{2}$，$PA=AD=3$，点 E，F 分别为线段 PD，BC 的中点．



（1）求证：$EF\parallel$平面 ABP；

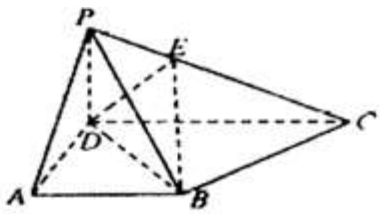
（2）求证：平面 $AEF\perp$平面 PCD；

（3）求三棱锥 $C-AEF$ 的体积．

6．如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是梯形，$AB\parallel CD$，$AD\perp AB$，$AB=AD=PD=\frac{1}{2}CD$，$PD\perp$平面 $ABCD$．

（1）证明：平面 $PBD\perp$平面 PBC；

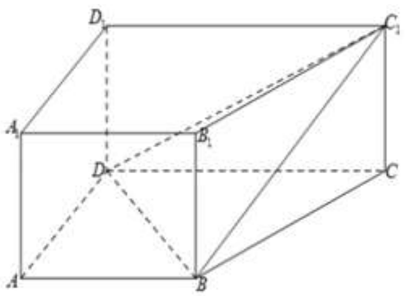
（2）是否存在一点 E，使得 $PA\parallel$平面 BDE？若存在，请说明点 E 的位置，并证明你的结论；若不存在，请说明理由．



7．（向量法）如图，在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是梯形，$AB\parallel CD$，$AB\perp AD$，$CD=2AB=2AD$．

（1）求证：$BD\perp$平面 BCC_1；

（2）在线段 C_1D_1 上是否存在一点 E，使 $AE\parallel$面 BC_1D．若存在，确定点 E 的位置并证明；若不存在，请说明理由．

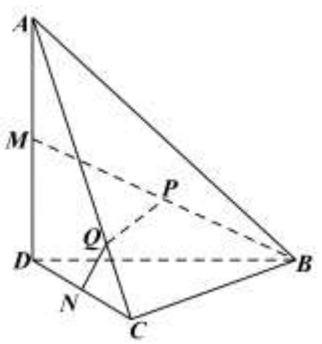


二轮大题专练13—立体几何（证明平行、垂直）

1．如图，四面体$ABCD$中，$BC=CD$，$\angle BCD=90^{\circ}$，$AD\perp$平面BCD．M为AD中点，P为BM中点，点Q在线段AC上，且$AQ=3QC$．

（1）求证：$PQ//$平面BCD；

（2）若$AD=DC$，N是CD的中点，求证：$NQ\perp$平面ABC．



证明:（1）如图，取BD的中点为E，在CD上取一点F，使得$DF=3FC$，连结EP，FQ，EF，

则由P，E分别为BM，DB的中点，

可得$PE//DM$，且$PE=\dfrac{1}{2}DM$，

又M为AD的中点，则$PE=\dfrac{1}{4}AD$，

因为$AQ=3QC$，$DF=3FC$，所以$QF//AD$，且$QF=\dfrac{1}{4}AD$，

所以$PE//QF$，且$PE=QF$，故四边形$EFQP$是平行四边形，

所以$PQ//EF$，

又$PQ\not\subset$平面BCD，$EF\subset$平面BCD，

所以$PQ//$平面BCD．

（2）设O为AC的中点，

因为 $AD \perp$ 平面 BCD， $BC \subset$ 平面 BCD，所以 $AD \perp BC$，

因为 $BC \perp CD$， CD， $AD \subset$ 平面 BCD， $CD \cap AD = D$，

所以 $BC \perp$ 平面 ACD，因为 $NQ \subset$ 平面 ACD，所以 $BC \perp NQ$，

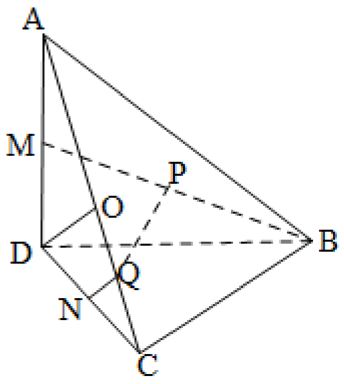
因为点 O 为 AC 的中点， $AQ = 3QC$，所以点 Q 为 CO 的中点，

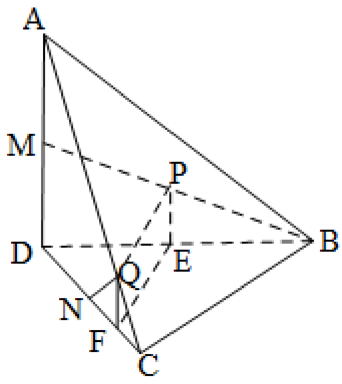
因为 N 是 CD 的中点，所以 $NQ // DO$，因为 $AD = DC$，

所以 ΔADC 是等腰直角三角形， $DO \perp AC$，

所以 $NQ \perp AC$，因为 $BC \subset$ 平面 ABC， $AC \subset$ 平面 ABC， $BC \cap AC = C$，

所以 $NQ \perp$ 平面 ABC.



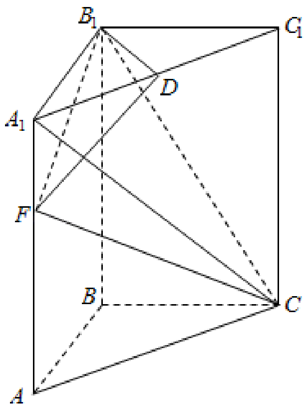


2．如图，直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，底面是等腰直角三角形，

$AB = BC = \sqrt{2}$， $BB_1 = 3$， D 为 A_1C_1 的中点， F 在线段 AA_1 上.

（1） AF 为何值时， $CF \perp$ 平面 B_1DF？

（2）设 $AF = 1$，求平面 B_1CF 与平面 ABC 所成的锐二面角的余弦值.



解：（1）因为直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，

$BB_1\perp$面 ABC，$\angle ABC=\dfrac{\pi}{2}$．

以 B 点为原点，BA、BC、BB_1 分别为 x、y、z 轴建立如图所示空间直角坐标系．

因为 $AC=2$，$\angle ABC=90^\circ$，所以 $AB=BC=\sqrt{2}$，

从而 $B(0，0，0)$，$A(\sqrt{2},\ 0,\ 0)$，$C(0,\ \sqrt{2},\ 0)$，$B_1(0，0，3)$，$A_1(\sqrt{2},\ 0,\ 3)$，$C_1(0,\ \sqrt{2},\ 3)$，$D(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 3)$，

所以 $\overrightarrow{CA_1}=(\sqrt{2},\ -\sqrt{2},\ 3)$，

设 $AF=x$，则 $F(\sqrt{2}，0，x)$，$\overrightarrow{CF}=(\sqrt{2},\ -\sqrt{2},\ x),\ \overrightarrow{B_1F}=(\sqrt{2},\ 0,\ x-3),\ \overrightarrow{B_1D}=(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 0).\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{B_1D}=\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+(-\sqrt{2})\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+x\cdot 0=0$，所以 $\overrightarrow{CF}\perp\overrightarrow{B_1D}$．

要使 $CF\perp$平面 B_1DF，只需 $CF\perp B_1F$．

由 $\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{B_1F}=2+x(x-3)=0$，得 $x=1$ 或 $x=2$，

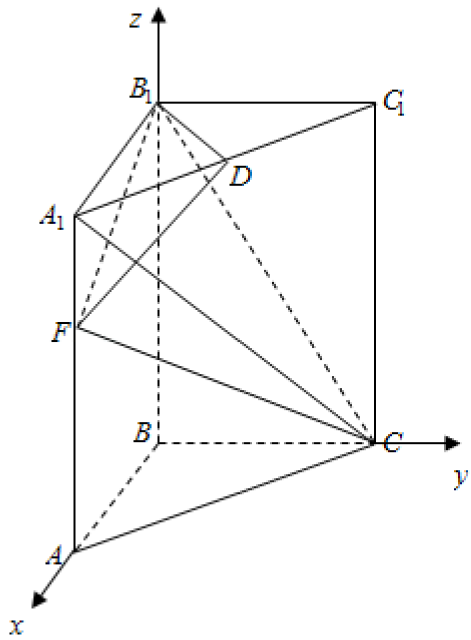
故当 $AF=1$ 或 2 时，$CF\perp$平面 B_1DF．（5 分）

（2）由（1）知平面 ABC 的法向量为 $n_1=(0，0，1)$．

设平面 B_1CF 的法向量为 $n=(x，\ y，\ z)$，则由 $\begin{cases} n\cdot\overrightarrow{CF}=0 \\ n\cdot\overrightarrow{B_1F}=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} \sqrt{2}x-\sqrt{2}y+z=0 \\ \sqrt{2}x-2z=0 \end{cases}$

令 $z=1$ 得 $n=(\sqrt{2},\ \frac{3}{2}\sqrt{2},\ 1)$，

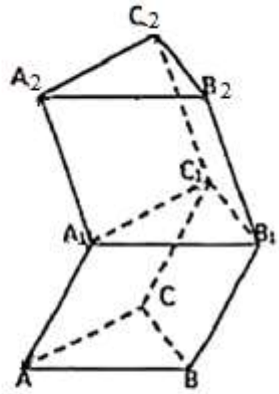
所以平面 B_1CF 与平面 ABC 所成的锐二面角的余弦值 $\cos\langle n,n_1\rangle=\dfrac{1}{1\times\sqrt{2+\frac{9}{2}+1}}=\dfrac{\sqrt{30}}{15}$．



3．如图所示的几何体由斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 和 $A_2B_2C_2-A_1B_1C_1$ 组成，满足：平行四边形 ABB_1A_1 与 $A_2B_2B_1A_1$、平行四边形 BCC_1B_1 与 $B_2C_2C_1B_1$、平行四边形 CAA_1C_1 与 $C_2A_2A_1C_1$ 分别全等，且点 T 为 AA_2 的中点．

（Ⅰ）若 A_1、C_1、T 三点不共线，求证：$AA_2\perp$ 面 A_1C_1T；

（Ⅱ）若 $AB=AC=AA_1$，面 $AA_1B\perp$ 面 ABC，侧棱 AA_1 和底面 ABC 所成的角是 $60°$，求证：面 $A_1B_2C_2$ // 面 BCC_1B_1．



证明：（Ⅰ）因为 AA_2 的中点为 T，连接 A_1T 、 C_1T ，

$\because$ 平行四边形 CAA_1C_1 与 $C_2A_2A_1C_1$ 全等，$\therefore A_1A=A_1A_2$， $C_1A=C_1A_2$ ，

$\therefore AA_2\perp A_1T$ ， $AA_2\perp C_1T$ ，且 $A_1T\cap C_1T=T$ ．

因为 A_1 、 C_1 、 T 不共线，所以 $AA_2\perp$ 面 A_1C_1T ；

（Ⅱ）连接 A_1B_2，由（Ⅰ）可知， $AA_2\perp$ 面 A_1C_1T ，同理可证 $AA_2\perp$ 面 B_1C_1T ，

而面 $B_1C_1T\cap$ 面 $A_1C_1T=T$ ，因此面 B_1C_1T 与面 A_1C_1T 重合，即为平面 $A_1B_1C_1$，

且面 $ABC//$ 面 $A_1B_1C_1$，因此 $AA_2\perp$ 面 ABC，

又$\because$ 面 $AA_1B\perp$ 面 ABC ， $\therefore A_2\in$ 面 ABB_1A_1，

$\because A_2B_2//A_1B_1$， $\therefore A_2B_2\subset$ 面 ABB_1A_1，且 A_1 在平面 ABC 的投影在直线 AB 上，

$\therefore\angle A_1AB$ 即为线面角， $\therefore\angle A_1AB=60^\circ$，

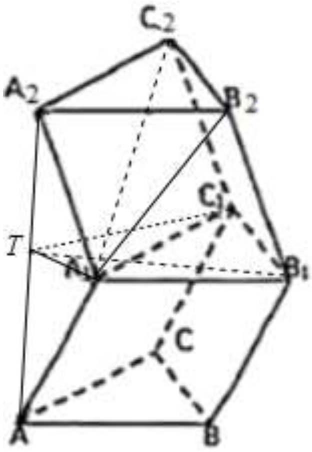
由 $AB=AC=AA_1$ ，可得 $A_1B=AB=A_1B_2=A_1B_1=B_1B_2$ ，

即有 $\angle B_2A_1B_1=60^\circ$，

$\therefore A_1B_2//B_1B$，

又 $C_2B_2//C_1B_1$， $A_1B_2\cap C_2B_2=B_2$， $B_1B\cap C_1B_1=B_1$，

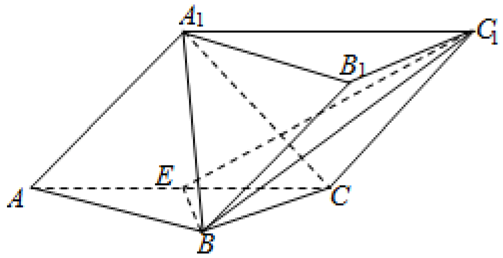
故面 $A_1B_2C_2//$ 面 BCC_1B_1 .



4. 如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，平面 $A_1ACC_1\perp$ 平面 ABC，$AB=BC=2$，$\angle ACB=30^\circ$，$AA_1=3$，$BC_1\perp A_1C$，E 为 AC 的中点．

（1）求证：$AB_1//$ 平面 C_1EB；

（2）求证：$A_1C\perp$ 平面 C_1EB．



证明：（1）取 A_1C_1 中点 D，连接 AD，B_1D，

∵在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，E 为 AC 的中点．

∴$BE//B_1D$，$AE\underset{=}{\parallel}DC_1$，∴四边形 AEC_1D 是平行四边形，∴$AD//C_1E$，

∵$AD\cap DB_1=D$，$AD\subset$ 平面 ADB_1，$DB_1\subset$ 平面 ADB_1，

$BC_1\cap BE=B$，$BC_1\subset$ 平面 C_1EB，$BE\subset$ 平面 C_1EB，

∴平面 ADB_1 // 平面 C_1EB ，

∵AB_1⊂平面 ADB_1，∴AB_1 // 平面 C_1EB.

（2）∵$BA=BC$，E 为 AC 的中点，∴$BE\perp AC$，

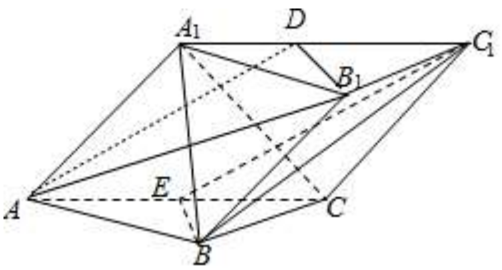
又平面 $A_1ACC_1\perp$平面 ABC，平面 $A_1ACC_1\cap$平面 $ABC=AC$，

BE⊂平面 ABC，

∴$BE\perp$平面 A_1ACC_1，又 A_1C⊂平面 A_1ACC_1，

∴$BE\perp A_1C$．又 $BC_1\perp A_1C$，$BE\cap BC_1=B$，

∴$A_1C\perp$面 C_1EB.

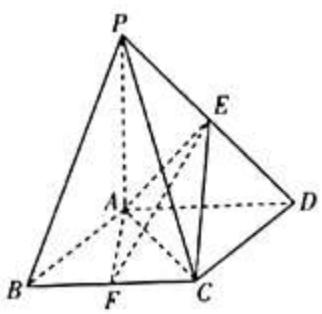


5．如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，$PB=PD=3\sqrt{2}$，$PA=AD=3$，点 E，F 分别为线段 PD，BC 的中点．

（1）求证：EF // 平面 ABP；

（2）求证：平面 $AEF\perp$平面 PCD；

（3）求三棱锥 $C-AEF$ 的体积．



证明：（1）如图，取 PA 的中点 G，连接 BG，EG，

∵点 E，G 分别为 PD，PA 的中点，$EG \parallel AD$，$EG=\frac{1}{2}AD$，

又∵F 是 BC 的中点，四边形 $ABCD$ 是正方形，∴$BF \parallel EG$ 且 $BF=EG$，

故四边形 $EFBG$ 为平行四边形，∴$EF \parallel BG$，

∵$BG\subset$平面 ABP，$EF\not\subset$平面 ABP，

∴$EF \parallel$平面 ABP；

证明：（2）由条件知 $PB=PD=3\sqrt{2}$，$PA=AD=AB=3$，

∴$\triangle PAB$ 和$\triangle PAD$ 都是等腰直角三角形，$PA\perp AB$，$PA\perp AD$，

又∵$AB\cap AD=A$，AB、$AD\subset$平面 $ABCD$，

∴$PA\perp$平面 $ABCD$，则 $PA\perp CD$，

又∵$AD\perp CD$，$PA\cap AD=A$，PA、$AD\subset$平面 PAD，

∴$CD\perp$平面 PAD，得 $CD\perp AE$，

∵E 是 PD 的中点，∴$AE\perp PD$，

又∵$PD\cap CD=D$，PD、$CD\subset$平面 PCD，

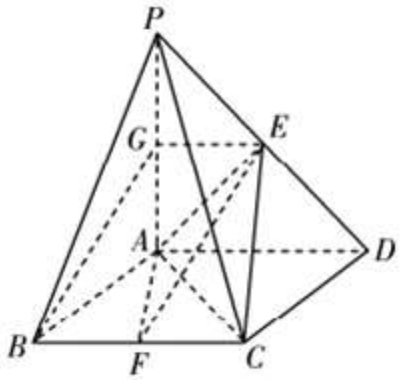
∴$AE\perp$平面 PCD，而 $AE\subset$平面 AEF，

∴平面 $AEF\perp$平面 PCD；

解：（3）由图可知 $V_{C-AEF}=V_{E-ACF}$，

∴$V_{E-ACF}=\frac{1}{3}S_{\triangle ACF}\times\frac{1}{2}PA=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times3\times\frac{1}{2}\times3=\frac{9}{8}$，

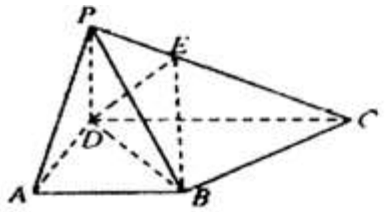
即三棱锥 $C-AEF$ 的体积为$\frac{9}{8}$.



6．如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是梯形，$AB // CD$，$AD \perp AB$，$AB=AD=PD=\frac{1}{2}CD$，$PD \perp$ 平面 $ABCD$．

（1）证明：平面 $PBD \perp$ 平面 PBC；

（2）是否存在一点 E，使得 $PA //$ 平面 BDE？若存在，请说明点 E 的位置，并证明你的结论；若不存在，请说明理由．



解：（1）证明：因为 $PD \perp$ 平面 $ABCD$，$BC \subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PD \perp BC$．

设 $AB=a$，则 $AD=a$，$CD=2a$，$BD=\sqrt{2}a$.

取 CD 的中点 M，连结 BM，则 $DM=CM=a$，所以 $DM=AB$，因为 $DM // AB$．

所以四边形 $ABMD$ 是平行四边形，所以 $BM=AD=a$，所以 $BC=\sqrt{2}a$，

所以 $BD^2+BC^2=2a^2+2a^2=4a^2=CD^2$，所以 $DB \perp BC$．

因为 $PD \cap DB=D$，PD，$DB \subset$ 平面 PBD，所以 $BC \perp$ 平面 PBD．

因为 $BC \subset$ 平面 PBC，所以平面 $PBC \perp$ 平面 PBD．

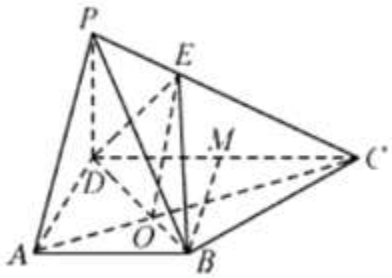
（2）解：当点 E 为 PC 边上靠近点 P 的三等分点时（即 $PE=\frac{1}{3}PC$）时，$PA//$平面 BDE．理由如下：

连结 AC 交 BD 于点 O，连结 OE，

因为$\triangle AOB\backsim\triangle COD$，所以$\frac{AO}{CO}=\frac{AB}{CD}=\frac{1}{2}$.

因为 $PE=\frac{1}{3}PC$，所以$\frac{PE}{CE}=\frac{1}{2}$，所以$\frac{AO}{CO}=\frac{PE}{CE}$，所以 $PA//EO$．

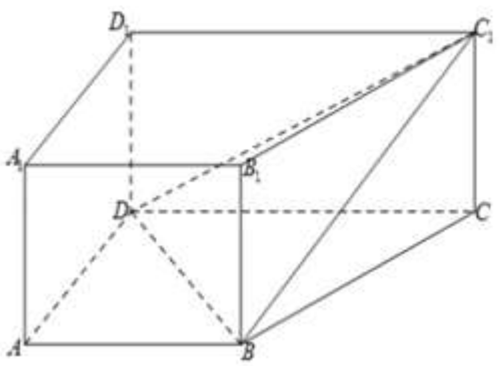
因为 $EO\subset$平面 BDE，$PA\not\subset$平面 BDE，所以 $PA//$平面 BDE．



7．如图，在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是梯形，$AB//CD$，$AB\perp AD$，$CD=2AB=2AD$．

（1）求证：$BD\perp$平面 BCC_1；

（2）在线段 C_1D_1 上是否存在一点 E，使 $AE//$面 BC_1D．若存在，确定点 E 的位置并证明；若不存在，请说明理由．



解：（1）证明：∵在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$CC_1\perp$平面 $ABCD$，$BD\subset$平面 $ABCD$，

∴$BD\perp CC_1$，

∵底面 $ABCD$ 是梯形，$AB /\!/ CD$，$AB\perp AD$，$CD=2AB=2AD$.

设 $AB=1$，则 $BD=BC=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，∴$BD^2+BC^2=CD^2$，∴$BD\perp BC$，

∵$CC_1\cap BC=C$，$CC_1\subset$平面 BCC_1，$BC\subset$平面 BCC_1，

∴$BD\perp$平面 BCC_1.

（2）假设在线段 C_1D_1 上存在一点 E，使 $AE /\!/$ 面 BC_1D.

证明如下：

以 D 为原点，DA 为 x 轴，DC 为 y 轴，DD_1 为 z 轴，建立空间直角坐标系，

设 $AB=1$，设 E（0，b，c），

则 A（1，0，0），D（0，0，0），B（1，1，0），C_1（0，2，c），

$\overrightarrow{AE}=(-1,b,c)$，$\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{DC_1}=(0,2,c)$，

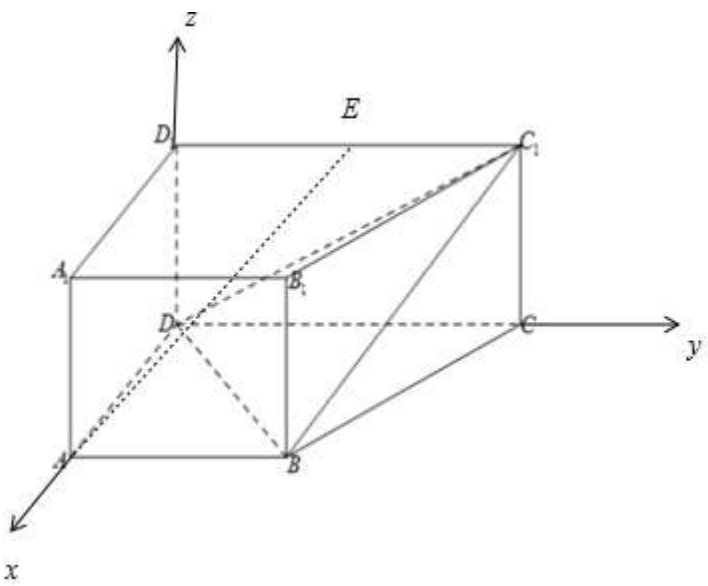
设平面 BDC_1 的法向量 $\overrightarrow{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{DB}=x+y=0\\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{DC_1}=2y+cz=0\end{cases}$，取 $x=1$，得 $\overrightarrow{n}=(1,-1,\frac{2}{c})$，

∵$AE /\!/$ 面 BC_1D，

∴$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{n}=-1-b+2=0$，解得 $b=1$.

∵在线段 C_1D_1 上存在一点 E，使 $AE /\!/$ 面 BC_1D，点 E 是线段 C_1D_1 的中点.


z
E
D_1
C_1
A_1
B_1
D
C
y
A
B
x