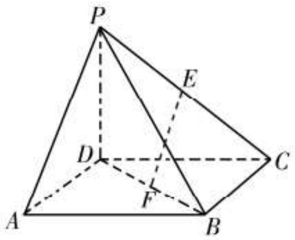
立体几何（计算面积、体积、距离）

1．从①$\overrightarrow{BG}=2\overrightarrow{GC}$,②$G$是$PB$的中点，③$G$是$\Delta PBC$的内心三个条件中任选一个条件，补充在下面问题中，并完成解答，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是矩形，$PD\perp$底面$ABCD$，且$PD=1$，$AB=\sqrt{3}$，$AD=2$，E，F分别为PC，BD的中点．



（1）判断EF与平面PAD的位置关系，并证明你的结论；

（2）若G是侧面PBC上的一点，且_____，求三棱锥$G-DCE$的体积．

2．如图1，在RtΔABC中，$\angle C=90^{\circ}$，$BC=AC=4$，D，E分别是AC，AB边上的中点，将ΔADE沿DE折起到△A_1DE的位置，使$A_1C=A_1D$，如图2．

（Ⅰ）求证：$DE\perp A_1C$；

（Ⅱ）求点C到平面A_1BE的距离．

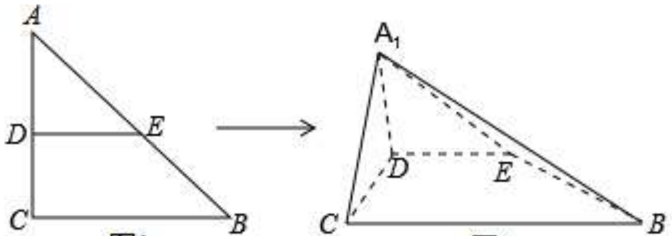
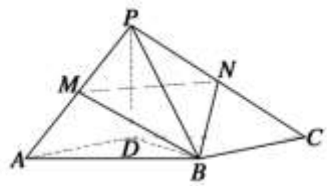


图1　　　　图2

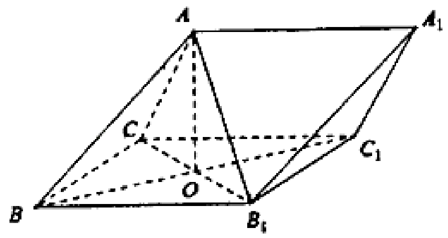
3．如图，平行四边形$ABCD$中，$\angle DAB=45°$，$PD\perp$平面$ABCD$，$PA\perp BD$，$BD=PD$，$AB=4$．（1）求证：平面$PBC\perp$平面PBD；

（2）若点M，N分别是PA，PC的中点，求三棱锥$P-MBN$的体积．



4．如图，三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，侧面BB_1C_1C为菱形，B_1C的中点为O，且$AO\perp$平面BB_1C_1C．（1）求证：$B_1C\perp AB$；

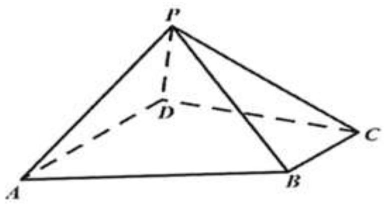
（2）若$AC\perp AB_1$，$\angle CB_1B=60°$，$BC=2$，求三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的高．



5．如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中， $AD//BC$ ，平面 $PAD\perp$ 平面 PBC .

（Ⅰ）若 $\angle PBC=\dfrac{\pi}{2}$，证明：$\angle APB=\dfrac{\pi}{2}$；

（Ⅱ）若 $AD=CD=2BC=2$， $\angle BCD=\dfrac{\pi}{3}$，且 $PA\perp PC$，求 $|PA|$ 的取值范围.

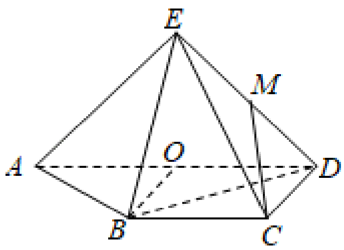


6．如图，在四棱锥 $E-ABCD$ 中，平面 $ADE\perp$ 平面 $ABCD$， O， M 分别为线段 AD， DE 的中点．四边形 $BCDO$ 是边长为 1 的正方形， $AE=DE$， $AE\perp DE$.

（1）求证：$CM//$ 平面 ABE；

（2）求直线 CM 与 BD 所成角的余弦值；

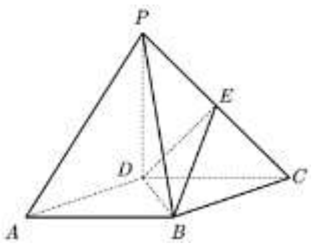
（3）点 N 在直线 AD 上，若平面 $BMN\perp$ 平面 ABE，求线段 AN 的长.



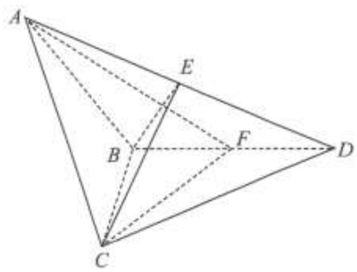
7．如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是长方形，侧棱 $PD\perp$ 底面 $ABCD$，$PD=DC=2$，E 是 PC 的中点.

（1）证明：$PA//$ 平面 BDE；

（2）若点 F 在线段 PB（不包含端点）上，二面角 $A-PD-B$ 为 $45°$，且直线 $PB\perp$ 平面 DEF，求线段 DF 的长.



8．如图所示，在三棱锥 $ABCD$ 中，$AB=BC=BD=2$，$AD=2\sqrt{3}$，$\angle CBA=\angle CBD=\dfrac{\pi}{2}$，点 E，F 分别为 AD，BD 的中点.



（Ⅰ）求证：平面 $ACD\perp$ 平面 BCE；

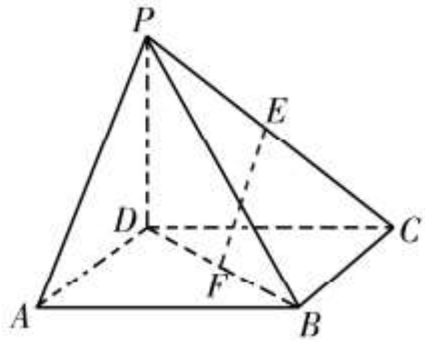
（Ⅱ）求四面体 $CDEF$ 的体积.

立体几何（计算面积、体积、距离）

1．从①$\overrightarrow{BG}=2\overrightarrow{GC}$,②$G$是$PB$的中点，③$G$是$\Delta PBC$的内心三个条件中任选一个条件，补充在下面问题中，并完成解答，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是矩形，$PD\perp$底面$ABCD$，且$PD=1$，$AB=\sqrt{3}$，$AD=2$，E，F分别为PC，BD的中点．

（1）判断EF与平面PAD的位置关系，并证明你的结论；

（2）若G是侧面PBC上的一点，且______，求三棱锥$G-DCE$的体积．



1.解：（1）EF与平面PAD平行．

证明如下：

连接AC，则AC与BD交于F点，

在ΔPAC中，E，F均为中点，$\therefore EF//PA$，

$\because EF\not\subset$平面PAD，$PA\subset$平面PAD，

$\therefore EF//$平面PAD．

（2）选择条件①：

$\because PD\perp$平面$ABCD$，$BC\subset$平面$ABCD$，$\therefore PD\perp BC$，

又$\because$底面$ABCD$是矩形，$\therefore CD\perp BC$，

$\because PD\cap CD=D$，$\therefore BC\perp$平面PDC， Q $\overrightarrow{BG}=2\overrightarrow{GC}$，$\therefore G$ 是 BC 的三等分点，且 $GC=\frac{1}{3}BC$，

Q $BC=AD=2$，$\therefore$ 三棱锥 $G-DCE$ 的高为 $GC=\frac{2}{3}$，

Q $PD\perp$ 底面 $ABCD$， $DC\subset$ 底面 $ABCD$，$\therefore PD\perp DC$，

在 ΔPDA 中， E 为 BD 中点，

$\therefore S_{\Delta CDE}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times PD\times DC=\frac{\sqrt{3}}{4}$，

$\therefore$ 三棱锥 $G-DCE$ 的体积为：$V_{G-DCE}=\frac{1}{3}S_{\Delta DCE}\,g\,GC=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{3}}{18}$，

选择条件②：

Q $PD\perp$ 平面 $ABCD$， $BC\subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore PD\perp BC$，

Q 底面 $ABCD$ 是矩形，$\therefore CD\perp BC$，

Q PD I $CD=D$，$\therefore BC\perp$ 平面 PDC，

Q G 是 PB 中点， E 是 PC 中点，$\therefore$ 在 ΔPBC 中， $GE\underset{=}{//}\frac{1}{2}BC$，

$\therefore$ 三棱锥 $G-DCE$ 的高为 $GE=1$，

Q $PD\perp$ 底面 $ABCD$， $DC\subset$ 底面 $ABCD$，$\therefore PD\perp DC$，

在 ΔPDC 中， E 为 PC 中点，$\therefore S_{\Delta CDE}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times PD\times DC=\frac{\sqrt{3}}{4}$，

$\therefore$ 三棱锥 $G-DCE$ 的体积为：$V_{G-DCE}=\frac{1}{3}S_{\Delta DCE}\,g\,GE=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 1=\frac{\sqrt{3}}{12}$．

选择条件③：

Q $PD\perp$ 平面 $ABCD$， $BC\subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore PD\perp BC$，

Q 底面 $ABCD$ 是矩形，$\therefore CD\perp BC$，

Q PD I $CD=D$，$\therefore BC\perp$ 平面 PDC，

设 ΔPBC 的内切圆与 PC 边相切于点 H，则 $GH \perp PC$，

$\because BC \perp$ 平面 PCD， $PC \subset$ 平面 PCD， $\therefore BC \perp PC$， $\therefore GH//BC$，

$\therefore$ 三棱锥 $G-DCE$ 的高为 GH，

在 RtΔPDC 中， $PG=\sqrt{PD^2+DC^2}=2$， $BC=2$，

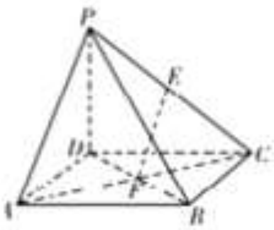
$\therefore PB=\sqrt{PC^2+BC^2}=2\sqrt{2}$， $\therefore GH=\dfrac{\frac{1}{2}\times 2\times 2}{\frac{1}{2}(2+2+2\sqrt{2})}=2-\sqrt{2}$，

$\because PD \perp$ 底面 $ABCD$， $DC \subset$ 底面 $ABCD$， $\therefore PD \perp DC$，

在 ΔPDC 中， E 为 PC 中点，

$\therefore S_{\Delta CDE}=\dfrac{1}{2}S_{\Delta PDC}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times PD\times DC=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，

$\therefore$ 三棱锥 $G-DCE$ 的体积为：$V_{G-DCE}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta DCE}\cdot GH=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(2-\sqrt{2})=\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{12}$.



2．如图 1，在 RtΔABC 中，$\angle C=90°$， $BC=AC=4$， D， E 分别是 AC， AB 边上的中点，将 ΔADE 沿 DE 折起到△ A_1DE 的位置，使 $A_1C=A_1D$， 如图 2．

（Ⅰ）求证： $DE \perp A_1C$；

（Ⅱ）求点 C 到平面 A_1BE 的距离．

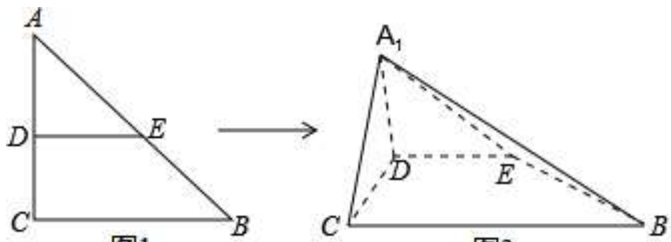


图1　　图2

2.（Ⅰ）证明：在图1ΔABC中，D，E为AC，AB边中点　所以$DE//BC$.

又$AC\perp BC$，所以$DE\perp AC$.

在图2中$DE\perp A_1D$，$DE\perp DC$，且$A_1D\cap DC=D$，则$DE\perp$平面A_1CD.

又因为$A_1C\subset$平面A_1CD，所以$DE\perp A_1C$.

（Ⅱ）解：由（Ⅰ）知$DE\perp$平面A_1CD，且$DE\subset$平面$BCDE$，

所以平面$A_1CD\perp$平面$BCDE$，

且平面$A_1CD\cap$平面$BCDE=DC$，

在正△A_1CD中，过A_1作$A_1O\perp CD$，垂足为O，

所以$A_1O\perp$平面$BCDE$．A_1O即为三棱锥A_1-BCE底面上的高，

在△A_1CD中，$A_1O=\sqrt{3}$.

在△A_1BE中，$A_1E=BE=2\sqrt{2}$，$A_1B=2\sqrt{5}$，所以$S_{\triangle A_1BE}=\sqrt{15}$.

在梯形$BCDE$中，$S_{\Delta BCE}=S_{\Delta BCD}=\frac{1}{2}BC\cdot CD=4$.

设点C到平面A_1BE的距离为h，

因为$V_{三棱锥C-A_1BE}=V_{三棱锥A_1-BCE}$，

所以$\frac{1}{3}S_{\triangle A_1BE}\cdot h=\frac{1}{3}S_{\triangle BCE}\cdot A_1O$，解得$h=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

即点C到平面A_1BE的距离为$\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

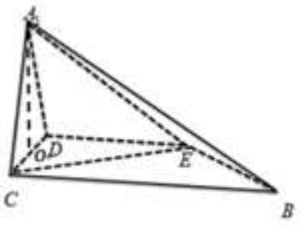
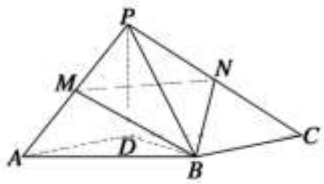


图 2

3．如图，平行四边形$ABCD$中，$\angle DAB=45^{\circ}$，$PD\perp$平面$ABCD$，$PA\perp BD$，$BD=PD$，$AB=4$.

（1）求证：平面$PBC\perp$平面PBD；

（2）若点M，N分别是PA，PC的中点，求三棱锥$P-MBN$的体积.



3.解：（1）证明：因为$PD\perp$平面$ABCD$，$BD\subset$平面$ABCD$，所以$PD\perp BD$.

又$PA\perp BD$，$PA\cap PD=P$，平面$PD\subset$平面PAD，$PA\subset$平面PAD，

所以$BD\perp$平面PAD，

而$AD\subset$平面PAD，所以$BD\perp AD$.

在平行四边形$ABCD$中，$AD//BC$，所以$BD\perp BC$.

由$PD\perp$平面$ABCD$，$BC\subset$平面$ABCD$，所以$PD\perp BC$，

而$BD\cap PD=D$，$PD\subset$平面PBD，$BD\subset$平面PBD，

所以$BC\perp$平面PBD.

又 $BC \subset$ 平面 PBC，所以平面 $PBC \perp$ 平面 PBD.

（2）由（1）可知，$BD \perp AD$，而 $\angle DAB = 45°$，

则 ΔADB 为等腰直角三角形，

又 $AB = 4$，所以 $PD = BD = AD = 2\sqrt{2}$，

连接 AC，由点 M，N 分别是 PA，PC 的中点，

所以 $\Delta PMN \sim \Delta PAC$，且 $MN = \frac{1}{2}AC$，

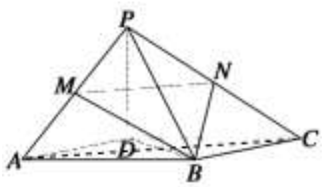
所以 $S_{\Delta PMN} = \frac{1}{4}S_{\Delta PAC}$，则 $V_{P-MBN} = V_{B-PMN} = \frac{1}{4}V_{B-PAC} = \frac{1}{4}V_{P-ABC}$，

在平行四边形 $ABCD$ 中，$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4$，

PD 为三棱锥 $P-ABC$ 的高，

所以 $V_{P-ABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \cdot PD = \frac{1}{3} \times 4 \times 2\sqrt{2} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$，

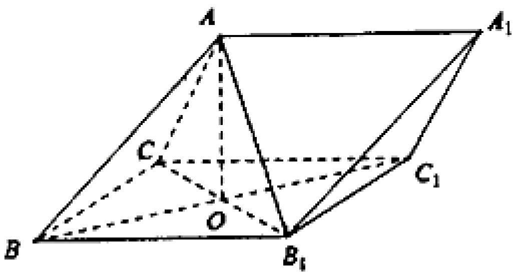
所以三棱锥 $P-MBN$ 的体积为 $V_{P-MBN} = \frac{1}{4}V_{P-ABC} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.



4．如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 BB_1C_1C 为菱形，B_1C 的中点为 O，且 $AO \perp$ 平面 BB_1C_1C.

（1）求证：$B_1C \perp AB$；

（2）若 $AC \perp AB_1$，$\angle CB_1B = 60°$，$BC = 2$，求三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高.



4.解：（1）证明：连结 BC_1，则 O 为 BC_1 与 B_1C 的交点，

因为侧面 BB_1C_1C 为菱形，

所以 $B_1C \perp BC_1$，

又 $AO \perp$ 平面 BB_1C_1C，$\therefore B_1C \perp AO$，

又 $BC_1 \cap AO = O$，$B_1C \subset$ 平面 ABO，$AO \subset$ 平面 ABO，

$\therefore B_1C \perp$ 平面 ABO，

由于 $AB \subset$ 平面 ABO，

故 $B_1C \perp AB$.

（2）作 $OD \perp BC$，垂足为 D，连结 AD，作 $OH \perp AD$，垂足为 H，

由于 $BC \perp AO$，$BC \perp OD$，$AO \cap OD = D$，

故 $BC \perp$ 平面 AOD，所以 $OH \perp BC$.

又 $OH \perp AD$，$BC \cap AD = D$，$BC \subset$ 平面 ABC，$AD \subset$ 平面 ABC，

所以 $OH \perp$ 平面 ABC.

因为 $\angle CBB_1 = 60°$，$BB_1 = BC$，

所以 ΔCBB_1 为等边三角形，

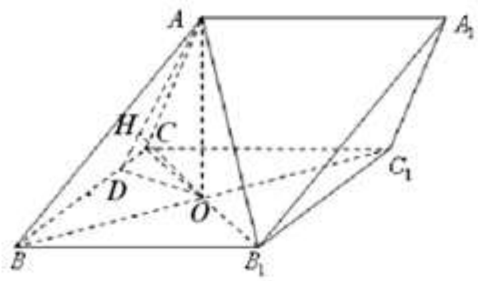
又 $BC=2$，可得 $OD=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

由于 $AC\perp AB_1$，所以 $OA=\frac{1}{2}B_1C=1$，

由 $OH\cdot AD=OD\cdot OA$，且 $AD=\sqrt{OD^2+OA^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}$，得 $OH=\frac{\sqrt{21}}{7}$，

又 O 为 B_1C 的中点，所以点 B_1 到平面 ABC 的距离为 $\frac{2\sqrt{21}}{7}$，

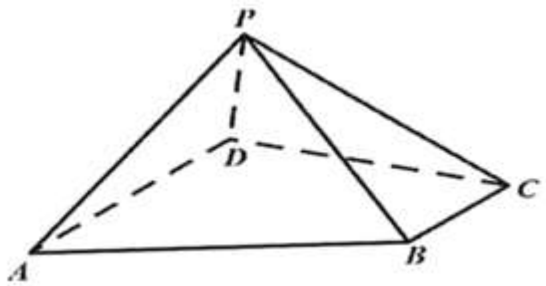
故三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高为 $\frac{2\sqrt{21}}{7}$.



5．如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AD//BC$，平面 $PAD\perp$ 平面 PBC.

（Ⅰ）若 $\angle PBC=\frac{\pi}{2}$，证明：$\angle APB=\frac{\pi}{2}$；

（Ⅱ）若 $AD=CD=2BC=2$，$\angle BCD=\frac{\pi}{3}$，且 $PA\perp PC$，求 $|PA|$ 的取值范围.



5.（Ⅰ）证明：设平面 $PAD\cap$ 平面 $PBC=l$，

Q $AD//BC$，$AD\subset$ 平面 PAD，$BC\not\subset$ 平面 PAD，

$\therefore BC//$ 平面 PAD，又 $BC\subset$ 平面 PBC，平面 $PAD\cap$ 平面 $PBC=l$，

$\therefore BC//l$，

$\because \angle PBC=\dfrac{\pi}{2}$， $\therefore PB\perp BC$， $PB\perp l$，

$\therefore PB\perp$平面PAD，

$\because PA\subset$平面PAD， $\therefore PB\perp PA$，即： $\angle APB=\dfrac{\pi}{2}$.

（Ⅱ）解：连接BD，在ΔBCD中，由余弦定理得$BD=\sqrt{3}$，

则$BD^2+BC^2=DC^2$，故$BD\perp BC$，

以点D为坐标原点，以$\overrightarrow{DA}$， $\overrightarrow{DB}$的方向为x轴， y轴正方向建立空间直角坐标系，如图所示：

则$D(0，0，0)$， $A(2，0，0，)$， $B(0，\sqrt{3}，0)$， $C(-1，\sqrt{3}，0)$，

设$P(x，y，z)$，则$|PA|=\sqrt{(x-2)^2+y^2+z^2}$ ，

当$x=0$时，平面$PAD\perp$平面PBD，又平面$PAD\perp$平面PBC，平面$PBC\cap$平面$PBD=PB$，

$\therefore PB\perp$平面PAD， $\therefore PD\perp PB$，即$\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，

$\therefore y^2-\sqrt{3}y+z^2=0$，即$(y-\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2+z^2=\dfrac{3}{4}$，

由$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}<y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，得$0<y<\sqrt{3}$，

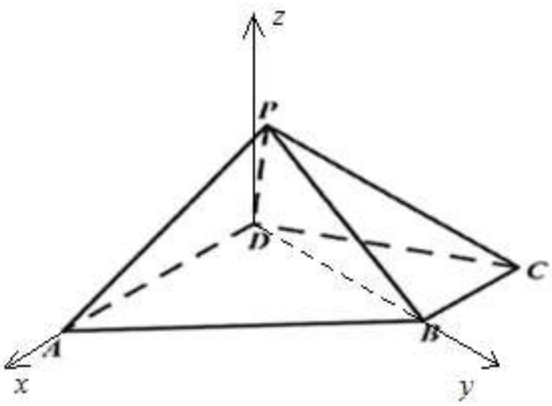
又$PA\perp PC$， $\therefore \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{CP}=0$，即$x^2-x-2+y^2-\sqrt{3}y+z^2=0$，

$x^2-x-2=0$，解得$x=2$或$x=-1$，

当$x=2$时，$|PA|=\sqrt{y^2+z^2}=\sqrt{\sqrt{3}y}\in(0,\sqrt{3})$；

当$x=-1$时，$|PA|=\sqrt{9+y^2+z^2}=\sqrt{9+\sqrt{3}y}\in(3，2\sqrt{3})$.

$\therefore PA$的长的取值范围为$(0，\sqrt{3})\cup(3，2\sqrt{3})$.

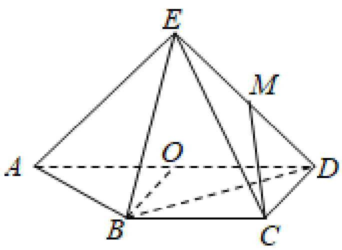


6．如图，在四棱锥$E-ABCD$中，平面$ADE\perp$平面$ABCD$，O，M分别为线段AD，DE的中点．四边形$BCDO$是边长为1的正方形，$AE=DE$，$AE\perp DE$．

（1）求证：$CM//$平面ABE；

（2）求直线CM与BD所成角的余弦值；

（3）点N在直线AD上，若平面$BMN\perp$平面ABE，求线段AN的长．



6.解：（1）证明：取线段AE中点P，连结BP、MP，

Q点M为DE中点，$\therefore MP//AD$，$MP=\dfrac{1}{2}AD$，

Q四边形$BCDO$是正方形，$\therefore BC//AD$，$BC=AD$，

$\therefore BC//MP$，$BC=MP$，

$\therefore$四边形$BCMP$是平行四边形，$\therefore CM//BP$，

Q$CM\not\subset$平面ABE，$BP\subset$平面ABE，

$\therefore CM//$平面ABE．

（2）解：连结 EO，$\because AE=DE$， O 为 AD 中点， $\therefore EO\perp AD$，

$\because EO\subset$ 平面 ADE， 平面 $ADE\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $ADE\cap$ 平面 $ABCD=AD$，

$\therefore EO\perp OB$， $EO\perp OD$，

$\because$ 正方形 $BCDO$， $\therefore OB\perp OD$，

以 O 为原点， OB 为 x 轴， OD 为 y 轴， OE 为 z 轴，建立空间直角坐标系，

$C(1，1，0)$， $M(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$， $B(1，0，0)$， $D(0，1，0)$，

$\overrightarrow{CM}=(-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$， $\overrightarrow{BD}=(-1，1，0)$，

设直线 CM 与 BD 所成角为 θ，

则 $\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{CM}|\cdot|\overrightarrow{BD}|}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

$\therefore$ 直线 CM 与 BD 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

（3）解：设 $\overrightarrow{ON}=\lambda\overrightarrow{OD}$， $\therefore N(0，\lambda，0)$，

$\overrightarrow{NB}=(1，-\lambda，0)$， $\overrightarrow{MB}=(1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$， $\overrightarrow{AB}=(1，1，0)$， $\overrightarrow{AE}=(0，1，1)$，

设平面 BMN 的法向量 $\vec{n}=(x，y，z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{NB}=x-\lambda y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{MB}=x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z=0\end{cases}$， 取 $y=1$，得 $\vec{n}=(\lambda，1，2\lambda-1)$，

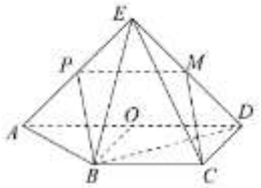
设平面 ABE 的法向量 $\vec{m}=(a，b，c)$，

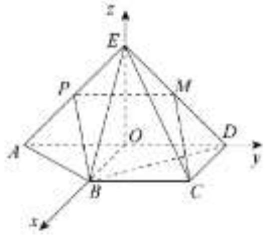
则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AB}=a+b=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AE}=b+c=0\end{cases}$， 取 $a=1$，得 $\vec{m}=(1，-1，1)$，

$\because$ 平面 $BMN\perp$ 平面 ABE，

$\therefore \vec{m}\cdot\vec{n}=\lambda-1+2\lambda-1=0$，解得 $\lambda=\dfrac{2}{3}$，

$\therefore AN=\dfrac{5}{3}$．

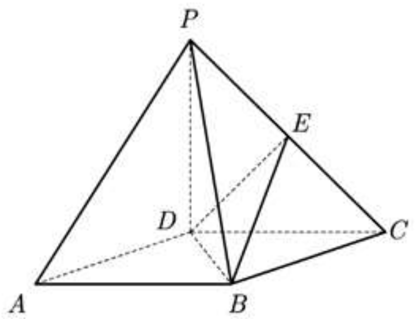




7．如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是长方形，侧棱 $PD\perp$ 底面 $ABCD$， $PD=DC=2$，E 是 PC 的中点．

（1）证明： $PA//$ 平面 BDE；

（2）若点 F 在线段 PB（不包含端点）上，二面角 $A-PD-B$ 为 45°，且直线 $PB\perp$ 平面 DEF，求线段 DF 的长．



7.解：（1）证明：连结 AC，交 BD 于 O，连结 OE，

$\because$ 底面 $ABCD$ 为长方形，$\therefore O$ 为对角线 AC， BD 的中点，

又 E 是 PC 的中点， $\therefore OE//PA$，

$\because OE \subset$ 平面 BDE， $PA \not\subset$ 平面 BDE，

$\therefore PA//$ 平面 BDE．

（2）由 $PD \perp$ 底面 $ABCD$，知 $PD \perp AD$， $P \perp BD$，

$\because$ 二面角 $A-PD-B$ 为 $45°$， $\therefore$ 二面角的平面角 $\angle ADB = 45°$，

$\because \angle BAD = 90°$， $\therefore AD = AB = AC = 2$， $\therefore$ 底面 $ABCD$ 是正方形， $AD \perp DC$，

以 D 为原点， DA， DC， DP 所在直线为 x， y， z 轴，建立空间直角坐标系，

由 $PD = DC = 2$，得 $A(2，0，0)$， $P(0，0，2)$， $E(0，1，1)$， $B(2，2，0)$，

假设 PB 上存在点 F，使得 $PB \perp$ 平面 DEF，

设 $\overrightarrow{PF} = \lambda\overrightarrow{PB}$， $(0 < \lambda < 1)$， $F(x，y，z)$，

则 $(x，y，z-2) = \lambda(2，2，-2)$， $\therefore F(2\lambda，2\lambda，2-2\lambda)$，

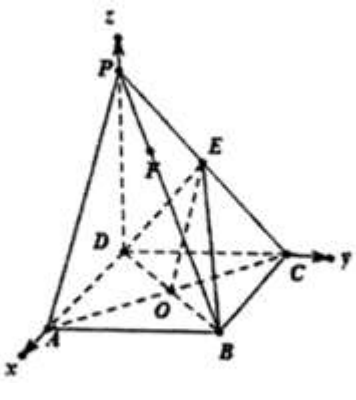
$\therefore \overrightarrow{DF} = (2\lambda，2\lambda，2-2\lambda)$， $\overrightarrow{PB} = (2，2，-2)$，

$\because$ 直线 $PB \perp$ 平面 DEF， $\therefore PB \perp DF$，

$\therefore \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{DF} = 4\lambda + 4\lambda - 2(2-2\lambda) = 0$，解得 $\lambda = \dfrac{1}{3}$，

$\therefore F(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3})$，

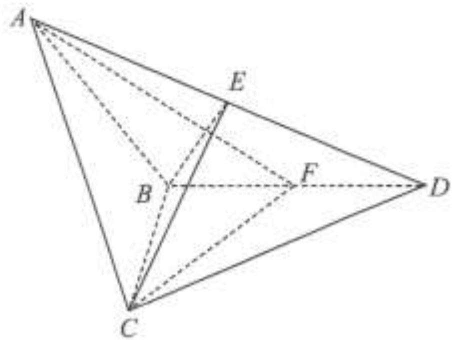
$\therefore |\overrightarrow{DF}| = \sqrt{(\dfrac{2}{3})^2 + (\dfrac{2}{3})^2 + (\dfrac{4}{3})^2} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$．



8．如图所示，在三棱锥 $ABCD$ 中， $AB=BC=BD=2$ ， $AD=2\sqrt{3}$ ， $\angle CBA=\angle CBD=\frac{\pi}{2}$ ，点 E ， F 分别为 AD ， BD 的中点．

（Ⅰ）求证：平面 $ACD\perp$ 平面 BCE ；

（Ⅱ）求四面体 $CDEF$ 的体积．



8.（Ⅰ）证明：因为 $\angle CBA=\angle CBD=\frac{\pi}{2}$ ，所以 $BC\perp AB$ ， $BC\perp BD$ ，

又 $AB\cap BD=B$ ， AB ， $BD\subset$ 平面 ABD ，所以 $BC\perp$ 平面 ABD ，又 $AD\subset$ 平面 ABD ，

所以 $BC\perp AD$ ，因为 $AB=AD$ ， E 为 AD 的中点，

所以 $BE\perp AD$ ，

又 $BC\cap BE=B$ ， $BC\subset$ 平面 BCE ， $BE\subset$ 平面 BCE ，

所以 $AD\perp$ 平面 BCE ，

又 $AD\subset$ 平面 ACD ，所以平面 $ACD\perp$ 平面 BCE ；

（Ⅱ）解：由（Ⅰ）可得 BC 为三棱锥 $C-DEF$ 的高，又点 E ， F 分别为 AD ， BD 的中点，

所以 $EF=\frac{1}{2}AB=1$ ， $FD=\frac{1}{2}BD=1$ ，

由余弦定理可得 $\cos\angle ABD=\frac{AB^2+BD^2-AD^2}{2AB\cdot AD}=\frac{4+4-12}{2\times2\times2}=-\frac{1}{2}$ ，

又 $0<\angle ABD<\pi$ ， $0<\angle EFD<\pi$ ，

所以$\angle EFD=\angle ABD=\dfrac{2\pi}{3}$，

所以$V_{C-DEF}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta DEF}\cdot BC=\dfrac{1}{3}\times(\dfrac{1}{2}EF\cdot FD\sin\dfrac{2\pi}{3})\cdot BC$

$=\dfrac{1}{3}\times(\dfrac{1}{2}\times1\times1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2})\times2=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，

所以四面体$CDEF$的体积为$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$．