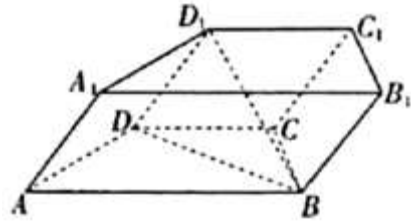


## 二轮大题专练 16—立体几何（二面角）

1. 如图，在四棱柱  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中，底面  $ABCD$  是以  $AB$ ， $CD$  为底边的等腰梯形，且

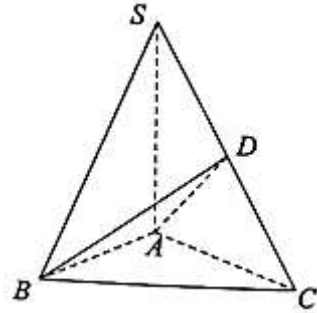
$AB = 2AD = 4$ ， $\angle DAB = 60^\circ$ ， $AD \perp D_1D$ 。



(1) 证明： $AD \perp BD_1$ 。

(2) 若  $D_1D = D_1B = 2$ ，求二面角  $A-BC-B_1$  的正弦值。

2. 如图，已知三棱锥  $S-ABC$  中， $\triangle ABC$  是边长为 2 的等边三角形， $SB = SC = 4$ ，点  $D$  为  $SC$  的中点， $DA = 2$ 。



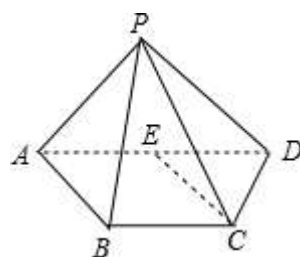
(1) 求证：平面  $SAB \perp$  平面  $ABC$ ；

(2) 求二面角  $S-AB-D$  的正弦值。

3. 如图，在四棱锥  $P-ABCD$  中， $AD \parallel BC$ ，平面  $APD \perp$  平面  $ABCD$ ， $PA = PD$ ， $E$  在  $AD$  上，且  $AB = BC = CD = DE = EA = 2$ 。

(1) 求证：平面  $PEC \perp$  平面  $PBD$ ；

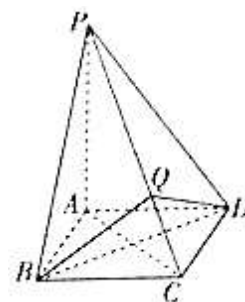
(2) 设直线  $PB$  与平面  $PEC$  所成的角为  $\frac{\pi}{6}$ ，求平面  $APB$  与平面  $PEC$  所成的锐二面角的余弦值。



4. 在四棱锥  $P-ABCD$  中，底面四边形  $ABCD$  是一个菱形，且  $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$ ， $AB = 2$ ， $PA \perp$  平面  $ABCD$ 。

(1) 若  $Q$  是线段  $PC$  上的任意一点，证明：平面  $PAC \perp$  平面  $QBD$ 。

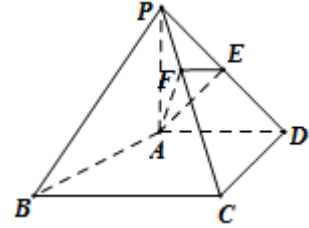
(2) 当平面  $PBC$  与平面  $PDC$  所成的锐二面角的余弦值为  $\frac{4}{5}$  时，求  $PA$  的长。



5. 如图，四棱锥  $P-ABCD$  的底面  $ABCD$  为梯形， $CD \perp AD$ ， $BC \parallel AD$ ， $PA \perp$  底面  $ABCD$ ，且  $PA=AD=CD=2$ ， $BC=3$ 。

(1)  $E$  为  $PD$  的中点，证明  $AE$  与平面  $PCD$  垂直；

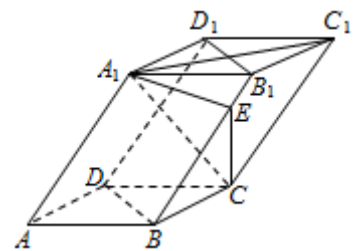
(2) 点  $F$  在  $PC$  上，且  $\frac{PF}{PC} = \frac{1}{3}$ ，求二面角  $F-AE-P$  的正弦值。



6. 如图，在平行六面体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中，底面  $ABCD$  是菱形，四边形  $BDD_1B_1$  是矩形。

(1) 求证： $BD \perp A_1C$ ；

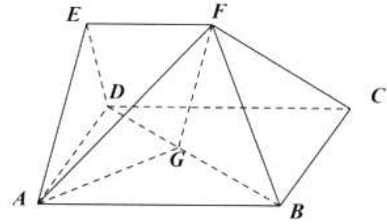
(2) 若  $AB=\sqrt{5}$ ， $BD=2$ ， $AA_1=A_1C=2\sqrt{2}$ ，点  $E$  在棱  $BB_1$  上，且  $B_1B=4B_1E$ ，求二面角  $E-A_1C-C_1$  的余弦值。



7. 在多面体  $ABCDEF$  中，四边形  $ABCD$  是正方形，平面  $ADE \perp$  平面  $ABCD$ ， $EF \parallel AB$ ， $DE = EF = 1$ ， $DC = 2$ ， $\angle EAD = 30^\circ$  .

(1) 求证： $CD \perp$  平面  $ADE$ ；

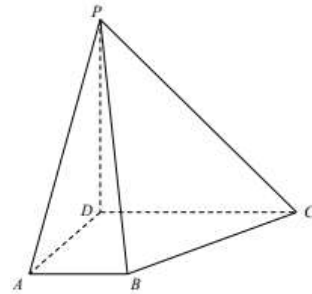
(2) 在线段  $BD$  上是否存在点  $G$ ，使得平面  $EAD$  与平面  $FAG$  所成的锐二面角的大小为  $30^\circ$ ，若存在，求出  $\frac{DG}{DB}$  的值；若不存在，说明理由.



8. 如图，在四棱锥  $P - ABCD$  中， $PD \perp$  平面  $ABCD$ ， $AB \parallel CD$ ， $AD \perp CD$ ，且  $AD = CD = PD = 2AB = 2$ .

(I) 求证： $AB \perp$  平面  $PAD$ ；

(II) 求二面角  $P - BC - A$  的余弦值.



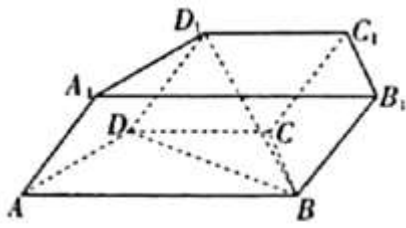
## 二轮大题专练 16—立体几何（二面角）

1. 如图，在四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中，底面  $ABCD$  是以  $AB$ ， $CD$  为底边的等腰梯形，且

$$AB = 2AD = 4, \angle DAB = 60^\circ, AD \perp D_1D.$$

(1) 证明：  $AD \perp BD_1$  .

(2) 若  $D_1D = D_1B = 2$ ，求二面角  $A - BC - B_1$  的正弦值.



(1) 证明：在  $\triangle ABD$  中， $AB = 4$ ， $AD = 2$ ， $\angle DAB = 60^\circ$ ，

$$\text{由余弦定理得 } BD = \sqrt{AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos 60^\circ} = 2\sqrt{3},$$

则  $AD^2 + BD^2 = AB^2$ ，即  $AD \perp BD$ ，

又  $Q AD \perp D_1D$ ， $BD \cap D_1D = D$ ，故  $AD \perp$  平面  $D_1DB$  .

而  $BD_1 \subset$  平面  $D_1DB$ ， $\therefore AD \perp BD_1$  .

(2) 解：取  $BD$  的中点  $O$ ， $Q D_1D = D_1B$ ， $\therefore D_1O \perp BD$  .

由 (1) 可知平面  $D_1DB \perp$  平面  $ABCD$ ，故  $D_1O \perp$  平面  $ABCD$  .

由  $ABCD$  是等腰梯形，且  $AB = 2AD = 4$ ， $\angle DAB = 60^\circ$ ，得  $DC = CB$ ，

$$\text{则 } CO \perp BD, D_1O = \sqrt{DD_1^2 - DO^2} = \sqrt{4 - 3} = 1.$$

以  $O$  为原点，分别以  $\overrightarrow{OB}$ ， $\overrightarrow{OC}$ ， $\overrightarrow{OD_1}$  的方向为  $x$ ， $y$ ， $z$  的正方向建立空间直角坐标系

$O - xyz$ ，

则  $A(-\sqrt{3}, -2, 0)$ ,  $B(\sqrt{3}, 0, 0)$ ,  $C(0, 1, 0)$ ,  $D(-\sqrt{3}, 0, 0)$ ,  $D_1(0, 0, 1)$ ,

$$\vec{AB} = (2\sqrt{3}, 2, 0), \quad \vec{BB}_1 = \vec{DD}_1 = (\sqrt{3}, 0, 1), \quad \vec{BC} = (-\sqrt{3}, 1, 0).$$

设平面  $B_1BC$  的法向量为  $\vec{n} = (x, y, z)$ ,

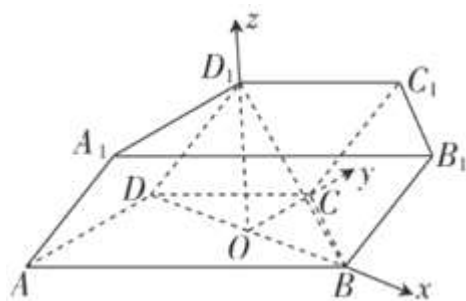
$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{BB}_1 = \sqrt{3}x + z = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{BC} = -\sqrt{3}x + y = 0 \end{cases},$$

令  $x=1$ , 则  $y=\sqrt{3}$ ,  $z=-\sqrt{3}$ , 有  $\vec{n} = (1, \sqrt{3}, -\sqrt{3})$ .

又  $\vec{m} = (0, 0, 1)$  是平面  $ABC$  的一个法向量.

$$\therefore |\cos\langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7} \times 1} = \frac{\sqrt{21}}{7},$$

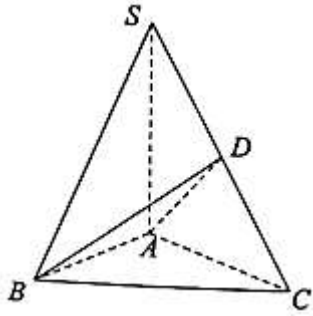
$\therefore$  二面角  $A-BC-B_1$  的正弦值为  $\sqrt{1 - \frac{3}{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$ .



2. 如图, 已知三棱锥  $S-ABC$  中,  $\triangle ABC$  是边长为 2 的等边三角形,  $SB=SC=4$ , 点  $D$  为  $SC$  的中点,  $DA=2$ .

(1) 求证: 平面  $SAB \perp$  平面  $ABC$ ;

(2) 求二面角  $S-AB-D$  的正弦值.



(1) 证明: 因为  $SC=4$ , 点  $D$  为  $SC$  的中点, 所以  $SD=DC=2$ ,

又  $AC=DA=2$ , 所以  $\triangle ADC$  是等边三角形, 所以  $\angle DCA = \frac{\pi}{3}$ ,

所以  $SA=2\sqrt{3}$ , 所以  $SC^2 = SA^2 + AC^2$ ,  $SA \perp AC$ .

又  $\triangle SAB \cong \triangle SAC$ , 得  $SA \perp AB$ , 又  $AB \cap AC = A$ ,

所以  $SA \perp$  平面  $ABC$ ,

又  $SA \subset$  平面  $SAB$ , 所以平面  $SAB \perp$  平面  $ABC$ .

(2) 解: 以  $A$  为坐标原点,  $AB$  为  $x$  轴, 在平面  $ABC$  内过点  $A$  垂直于  $AB$  的直线为  $y$  轴,

$AS$  为  $z$  轴, 建立空间直角坐标系.

则  $A(0, 0, 0)$ ,  $B(2, 0, 0)$ ,  $C(1, \sqrt{3}, 0)$ ,  $S(0, 0, 2\sqrt{3})$ ,

所以  $D(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3})$ ,  $\overrightarrow{AB} = (2, 0, 0)$ ,  $\overrightarrow{AD} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3})$ ,

设  $\vec{m} = (x, y, z)$  为平面  $ABD$  的法向量,

$$\text{由 } \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{AB} = 2x = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \sqrt{3}z = 0 \end{cases}, \text{ 令 } z=1, \text{ 得 } \vec{m} = (0, -2, 1).$$

而平面  $SAB$  的一个法向量  $\vec{n} = (0, 1, 0)$ ,

$$\therefore \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$



Q  $DB \subset$  平面  $PBD$ ,  $\therefore$  平面  $PEC \perp$  平面  $PBD$ ;

(2) 易得四边形  $AECB$ ,  $BCDE$  为菱形,  $\therefore \triangle ABE$ 、 $\triangle BCE$ 、 $\triangle CDE$  均为正三角形.

设  $EC \cap BD = O$ , 可得  $EO = CO = 1$ ,  $BO = DO = \sqrt{3}$

由 (1) 得  $BD \perp$  面  $PEC$ ,  $\angle BPO$  为直线  $PB$  与平面  $PEC$  所成的角,  $\therefore \angle BPO = \frac{\pi}{6}$ .

$\therefore PB = 2OB = 2\sqrt{3}$ ,  $PE = \sqrt{PB^2 - BE^2} = 2\sqrt{2}$ .  $\Rightarrow HP = \sqrt{\sqrt{PB^2 - BH^2}} = \sqrt{11}$ ,

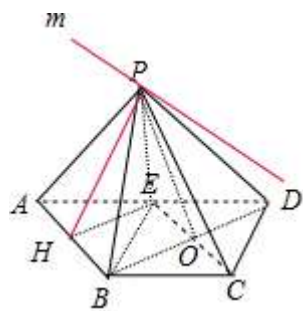
过  $P$  作直线  $m \parallel EC$ , 可得面  $APB \cap$  平面  $PEC = m$ .

取  $AB$  中点  $H$ , 则  $PH \perp m$ , 又  $PE \perp EC$ , 可得  $PE \perp m$ .

$\therefore \angle HPE$  平面  $APB$  与平面  $PEC$  所成的锐二面角.

在  $Rt\triangle PHE$  中,  $\cos \angle HPE = \frac{PE}{PH} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}} = \frac{2\sqrt{22}}{11}$

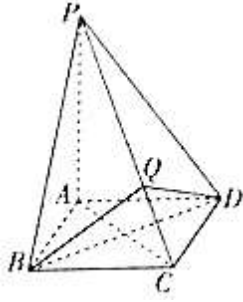
平面  $APB$  与平面  $PEC$  所成的锐二面角的余弦值为  $\frac{2\sqrt{22}}{11}$ .



4. 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面四边形  $ABCD$  是一个菱形, 且  $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$ ,  $AB = 2$ ,  $PA \perp$  平面  $ABCD$ .

(1) 若  $Q$  是线段  $PC$  上的任意一点, 证明: 平面  $PAC \perp$  平面  $QBD$ .

(2) 当平面  $PBC$  与平面  $PDC$  所成的锐二面角的余弦值为  $\frac{4}{5}$  时, 求  $PA$  的长.



解：(1) 证明：Q 四边形  $ABCD$  是一个菱形，

$$\therefore AC \perp BD,$$

又  $PA \perp$  平面  $ABCD$ ，

$$\therefore PA \perp BD,$$

又  $AC \cap PA = A$ ，则  $BD \perp$  平面  $PAC$ ，

Q  $BD$  在平面  $QBD$  内，

$$\therefore \text{平面 } PAC \perp \text{平面 } QBD;$$

(2) 设  $AC$ ， $BD$  交于点  $O$ ，分别以  $OB$ ， $OC$  所在直线为  $x$  轴， $y$  轴，以平行于  $AP$  的直线为  $z$  轴建立如图所示的空间直角坐标系，

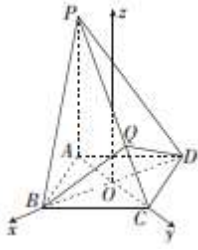
则  $B(\sqrt{3}, 0, 0), C(0, 1, 0), D(-\sqrt{3}, 0, 0)$ ，设  $P(0, -1, a)(a > 0)$ ，则  $\vec{CB} = (\sqrt{3}, -1, 0), \vec{CP} = (0, -2, a)$ ，

设平面  $PBC$  的一个法向量为  $\vec{m} = (x, y, z)$ ，则  $\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{CB} = \sqrt{3}x - y = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{CP} = -2y + az = 0 \end{cases}$ ，可取  $\vec{m} = (a, \sqrt{3}a, 2\sqrt{3})$ ，

同理可求平面  $PDC$  的一个法向量为  $\vec{n} = (-a, \sqrt{3}a, 2\sqrt{3})$ ，

$$\therefore |\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{-a^2 + 3a^2 + 12}{(\sqrt{4a^2 + 12})^2} = \frac{4}{5}, \text{ 解得 } a^2 = 2,$$

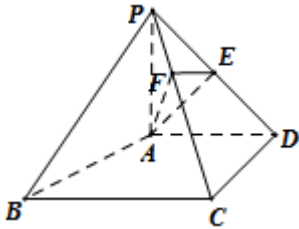
$$\therefore PA = \sqrt{2}.$$



5. 如图，四棱锥  $P-ABCD$  的底面  $ABCD$  为梯形， $CD \perp AD$ ， $BC \parallel AD$ ， $PA \perp$  底面  $ABCD$ ，且  $PA=AD=CD=2$ ， $BC=3$ 。

(1)  $E$  为  $PD$  的中点，证明  $AE$  与平面  $PCD$  垂直；

(2) 点  $F$  在  $PC$  上，且  $\frac{PF}{PC} = \frac{1}{3}$ ，求二面角  $F-AE-P$  的正弦值。



(1) 证明： $\because AP=AD=2$ ， $E$  为  $PD$  的中点

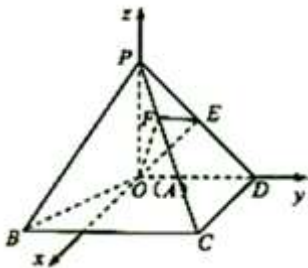
$\therefore \triangle APD$  为等腰三角形， $\therefore AE \perp PD$ ，

又  $\because PA \perp$  底面  $ABCD$ ， $\therefore PA \perp CD$ ，

$\because CD \perp AD$ ， $AD \cap PA = A$ ， $\therefore CD \perp$  平面  $PAD$ ， $CD \perp AE$ ，

$\because AE \perp PD$ ， $AE \perp CD$ ， $PD \cap CD = D$ ， $PD \subset$  平面  $PDC$ ， $CD \subset$  平面  $PDC$ ，

$\therefore AE \perp$  平面  $PCD$ 。



(2) 解: 因为  $PA \perp$  底面  $ABCD$ ,  $CD \perp AD$ ,  $BC \parallel AD$ ,

所以  $PA$ 、 $AD$ 、 $CD$  两两垂直,

以  $A$  点为原点,  $AD$  为  $y$  轴,  $AP$  为  $z$  轴, 过  $A$  做平面  $ABCD$  内  $CD$  的平行线, 交  $BC$  于点  $H$ ,  $AH$  为  $x$  轴, 建立如图所示空间直角坐标系.

因为  $PA=AD=CD=2$ ,  $BC=3$ ,

所以  $A(0, 0, 0)$ ,  $B(2, -1, 0)$ ,  $C(2, 2, 0)$ ,  $D(0, 2, 0)$ ,  $P(0, 0, 2)$ .

因为  $E$  为  $PD$  的中点, 点  $F$  在  $PC$  上, 且  $\frac{PF}{PC} = \frac{1}{3}$ , 所以  $E(0, 1, 1)$ ,  $F(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ .

设平面  $AEF$  的一个法向量为  $\vec{m}=(a, b, c)$ ,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{AE} = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{AF} = 0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} b+c=0 \\ \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b + \frac{4}{3}c=0 \end{cases}, \text{取 } b=1, \text{ 则 } a=1, c=-1, \text{ 得 } \vec{m}=(1, 1, -1).$$

又平面  $AEP$  的一个法向量为  $\vec{n}=(1, 0, 0)$ , 所以

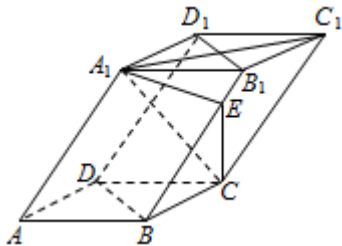
$$\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{3} \times 1} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

所以二面角  $F-AE-P$  的正弦值为  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ .

6. 如图, 在平行六面体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 底面  $ABCD$  是菱形, 四边形  $BDD_1B_1$  是矩形.

(1) 求证:  $BD \perp A_1C$ ;

(2) 若  $AB=\sqrt{5}$ ,  $BD=2$ ,  $AA_1=A_1C=2\sqrt{2}$ , 点  $E$  在棱  $BB_1$  上, 且  $B_1B=4B_1E$ , 求二面角  $E - A_1C - C_1$  的余弦值.



证明：(1) 连结  $AC$ ，交  $BD$  于点  $O$ ，

$\because$  底面  $ABCD$  是菱形， $\therefore AC \perp BD$ ，且  $O$  为  $AC$  的中点，

$\because$  四边形  $BDD_1B_1$  是矩形， $\therefore BD \perp DD_1$ ，

在平行六面体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中， $AA_1 \parallel DD_1$ ，

$\therefore BD \perp AA_1$ ，

$\because AA_1, AC \subset$  平面  $ACC_1A_1$ ， $AA_1 \cap AC = A$ ，

$\therefore BD \perp$  平面  $ACC_1A_1$ ，

$\because A_1C \subset$  平面  $ACC_1A_1$ ， $\therefore BD \perp A_1C$ 。

解：(2)  $\because AA_1 = A_1C$ ，且  $O$  为  $AC$  的中点， $\therefore A_1O \perp AC$ ，

$\because BD \perp$  平面  $ACC_1A_1$ ， $\therefore$  面  $ABCD \perp$  面  $ACC_1A_1$ ，

$\because$  面  $ABCD \cap$  面  $ACC_1A_1 = AC$ ， $\therefore A_1O \perp$  面  $ABCD$ ，

$\therefore A_1O \perp OA$ ， $A_1O \perp OB$ ，

$\therefore OA, OB, OA_1$  两两互相垂直，

分别以  $OA, OB, OA_1$  所在直线为  $x, y, z$  轴，建立空间直角坐标系，

$\because AA_1 = A_1C = 2\sqrt{2}$ ， $BD = 2$ ， $AB = \sqrt{5}$ ，

$\therefore OB = 1$ ， $OA = 2$ ， $OA_1 = 2$ ，

$\therefore A(2, 0, 0)$ ， $B(0, 1, 0)$ ， $A_1(0, 0, 2)$ ， $C(-2, 0, 0)$ ， $B_1(-2, 1, 2)$ ，

$\therefore \overrightarrow{A_1C} = (-2, 0, -2)$ ， $\overrightarrow{B_1B} = (2, 0, -2)$ ， $\overrightarrow{A_1E} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1E} = (-\frac{3}{2}, 1, -\frac{1}{2})$ ，

设平面  $A_1CE$  的一个法向量  $\vec{n} = (x, y, z)$ ，

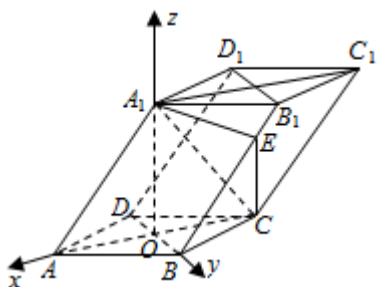
$$\text{则} \begin{cases} \vec{A_1E} \cdot \vec{n} = -\frac{3}{2}x + y - \frac{1}{2}z = 0 \\ \vec{A_1C} \cdot \vec{n} = -2x - 2z = 0 \end{cases}, \text{取 } x=1, \text{得 } \vec{n} = (1, 1, -1),$$

平面  $A_1CC_1$  的一个法向量为  $\vec{OB} = (0, 1, 0)$ ,

平面  $A_1CC_1$  的一个法向量为  $\vec{OB} = (0, 1, 0)$ ,

$$\therefore \cos \langle \vec{OB}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{OB} \cdot \vec{n}}{|\vec{OB}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

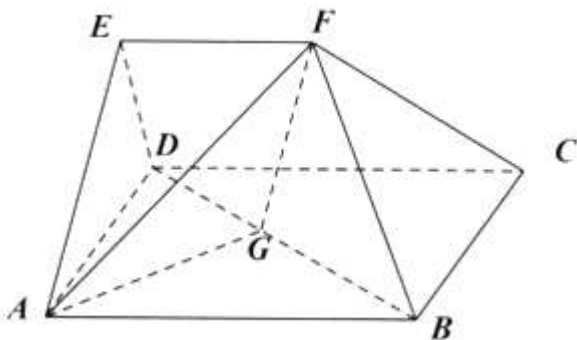
$\therefore$  二面角  $E - A_1C - C_1$  的余弦值为  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .



7. 在多面体  $ABCDEF$  中, 四边形  $ABCD$  是正方形, 平面  $ADE \perp$  平面  $ABCD$ ,  $EF \parallel AB$ ,  $DE = EF = 1$ ,  $DC = 2$ ,  $\angle EAD = 30^\circ$ .

(1) 求证:  $CD \perp$  平面  $ADE$ ;

(2) 在线段  $BD$  上是否存在点  $G$ , 使得平面  $EAD$  与平面  $FAG$  所成的锐二面角的大小为  $30^\circ$ , 若存在, 求出  $\frac{DG}{DB}$  的值; 若不存在, 说明理由.



证明：(1)  $\because$  平面  $ADE \perp$  平面  $ABCD$ , 平面  $ADE \cap$  平面  $ABCD = AD$ ,

正方形  $ABCD$  中,  $CD \perp AD$ ,

$\therefore CD \perp$  平面  $ADE$ .

解：(2) 由 (1) 知平面  $ABCD \perp$  平面  $AED$ .

在平面  $DAE$  内, 过  $D$  作  $AD$  的垂线  $DH$ , 则  $DH \perp$  平面  $ABCD$ ,

以点  $D$  为坐标原点,  $DA, DC, DH$  所在直线分别为  $x$  轴,  $y$  轴,  $z$  轴建立空间直角坐标系,

则  $D(0, 0, 0), B(2, 2, 0), C(0, 2, 0), A(2, 0, 0), F(\frac{1}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ,

$\vec{DB} = (2, 2, 0), \vec{AF} = (-\frac{3}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ,

设  $\vec{DG} = \lambda \vec{DB} = (2\lambda, 2\lambda, 0), \lambda \in [0, 1]$ , 则  $\vec{AG} = (2\lambda - 2, 2\lambda, 0)$ ,

设平面  $FAG$  的一个法向量  $\vec{n} = (x, y, z)$ ,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AF} = -\frac{3}{2}x + y + \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AG} = (2\lambda - 2)x + 2\lambda y = 0 \end{cases}$$

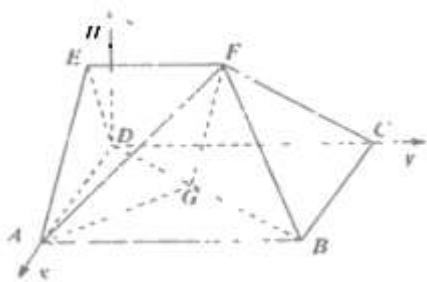
令  $x = -\sqrt{3}\lambda$ , 得  $\vec{n} = (-\sqrt{3}\lambda, \sqrt{3}(\lambda - 1), 2 - 5\lambda)$ ,

平面  $EAD$  的一个法向量  $\vec{m} = (0, 1, 0)$ ,

$$\text{由已如得 } \cos 30^\circ = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|\sqrt{3}(\lambda - 1)|}{\sqrt{3\lambda^2 + 3(1 - \lambda)^2 + (2 - 5\lambda)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

化简可得:  $9\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0$ , 解得  $\lambda = \frac{1}{3}$ ,

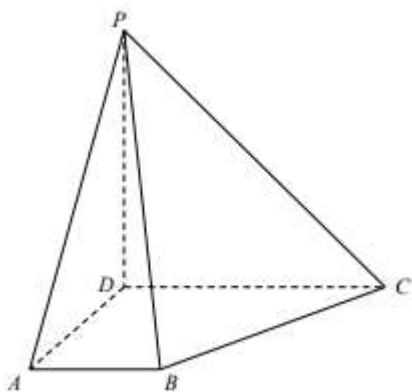
$\therefore \frac{DG}{DB} = \frac{1}{3}$ .



8.如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PD \perp$  平面  $ABCD$ ,  $AB \parallel CD$ ,  $AD \perp CD$ , 且  $AD=CD=PD=2AB=2$ .

(I) 求证:  $AB \perp$  平面  $PAD$ ;

(II) 求二面角  $P-BC-A$  的余弦值.



(I) 证明: 因为  $PD \perp$  平面  $ABCD$ ,  $AB \subset$  平面  $ABCD$ ,

所以  $PD \perp AB$ . (2分)

因为  $AB \parallel CD$ ,  $AD \perp CD$ ,

所以  $AD \perp AB$ . (4分)

因为  $PD \cap AD = D$ , (5分)

所以  $AB \perp$  平面  $PAD$ . (6分)

(II) 解: 因为  $PD \perp$  平面  $ABCD$ ,  $AD \perp CD$ , (7分)

所以以  $D$  为原点, 分别以  $DA$ ,  $DC$ ,  $DP$  为  $x$ ,  $y$ ,  $z$  轴建立空间直角坐标系  $D-xyz$ .

则  $D(0, 0, 0)$ ,  $A(2, 0, 0)$ ,  $B(2, 1, 0)$ ,  $C(0, 2, 0)$ ,  $P(0, 0, 2)$ , (8分)

所以  $\overrightarrow{PB}=(2, 1, -2)$ ,  $\overrightarrow{BC}=(-2, 1, 0)$ .

设平面  $PBC$  的法向量为  $\vec{n}=(x, y, z)$ ,

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{PB}=2x+y-2z=0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC}=-2x+y=0 \end{cases},$$

令  $x=1$ , 于是  $\vec{n}=(1, 2, 2)$ . (10分)

因为  $PD \perp$  平面  $ABCD$ ,

所以平面  $ABC$  的法向量为  $\vec{m}=(0, 0, 1)$ , (11分)

$$\text{所以 } \cos \langle \vec{n}, \vec{m} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \vec{m}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{m}|} = \frac{2}{3}. \text{ (12分)}$$

由题知二面角  $P-BC-A$  为锐角, 所以其余弦值是  $\frac{2}{3}$ . (13分)

