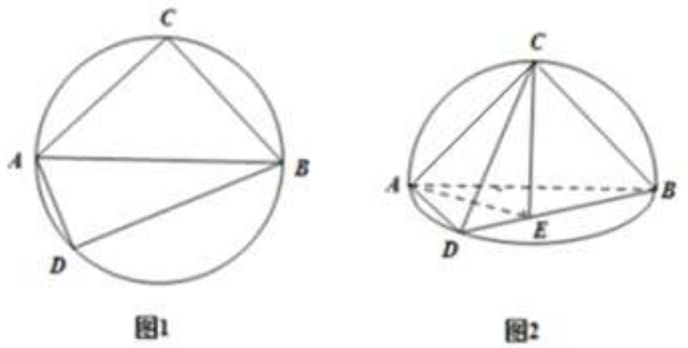
立体几何（探索性问题）

1．如图1，C，D是以AB为直径的圆上两点，且$AB=2AD$，$AC=BC$，将ΔABC所在的半圆沿直径AB折起，使得点C在平面ABD上的射影E在BD上，如图2．

（1）求证：$BC\perp$平面ACD；

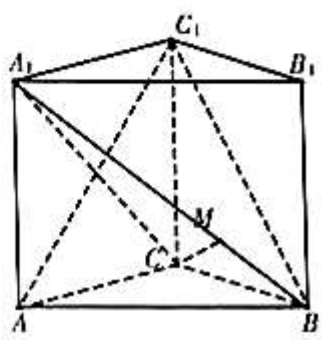
（2）在线段AB上是否存在点F，使得$AD//$平面CEF？若存在，求出$\dfrac{AF}{FB}$的值；若不存在，请说明理由．



2．如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，四边形AA_1C_1C是边长为$\sqrt{3}$的正方形，$CC_1\perp BC$，$BC=1$，$AB=2$．

（1）证明：平面$A_1BC\perp$平面ABC_1；

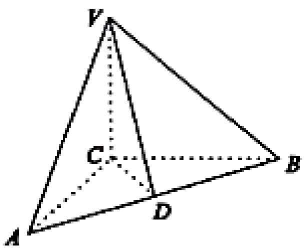
（2）在线段A_1B上是否存在点M，使得$CM\perp BC_1$，若存在，求$\dfrac{BM}{BA_1}$的值；若不存在，请说明理由．



3．如图，在三棱锥$V-ABC$中，$VC\perp$底面ABC，$AC\perp BC$，D是棱AB的中点，且$AC=BC=VC$.

（1）证明：平面$VAB\perp$平面VCD；

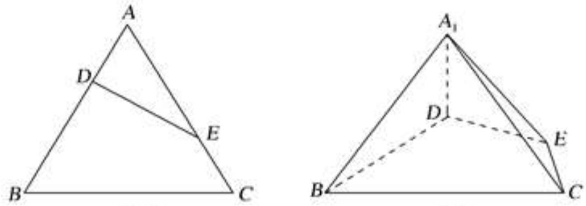
（2）若$AC=2\sqrt{2}$，且棱AB上有一点E，使得直线VD与平面VCE所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{15}}{15}$，试确定点E的位置，并求三棱锥$C-VDE$的体积.



4．等边ΔABC的边长为3，点D，E分别是AB，BC上的点，且满足$\frac{AD}{DB}=\frac{CE}{EA}=\frac{1}{2}$（如图（1）)，将$\Delta ADE$沿$DE$折起到△$A_1DE$的位置，使面$A_1DE\perp$面$BCED$，连接$A_1B$，$A_1C$（如图（2）).

（1）求证：$A_1D\perp$平面$BCED$；

（2）线段A_1B上是否存在点P，使直线DP与直线EA_1所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{5}}{10}$？若存在，求出$\frac{A_1P}{A_1B}$的值，若不存在，请说明理由.



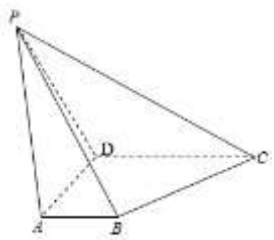
图(1)　　图(2)

5．在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $ABCD\perp$ 平面 PCD，底面 $ABCD$ 为直角梯形，$AB//CD$，$AD\perp DC$，且 $AB=1$，$AD=DC=DP=2$，$\angle PDC=120°$．

（1）求证：$AD\perp$ 平面 PCD；

（2）线段 BC 上是否存在点 F，使得 $PDF\perp$ 平面 PAC？如果存在，求 $\dfrac{BF}{BC}$ 的值；如果不存在，说明理由；

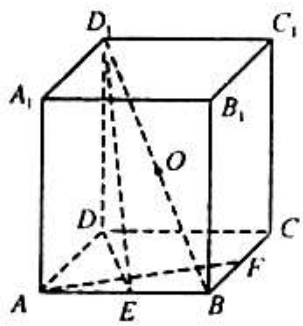
（3）若 M 是棱 PA 的中点，N 为线段 BC 上任意一点，求证：MN 与 PC 一定不平行．



6．如图，在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为 AB 的中点，F 为 BC 的中点，O 为 BD_1 的中点．

（1）求证：$AF\perp$ 平面 DD_1E；

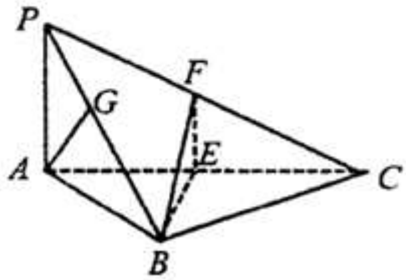
（2）线段 AF 上是否存在点 G，使得 $OG//$ 平面 DD_1E，若存在，求出 $\dfrac{AG}{GF}$ 的值，若不存在，请说明理由．



7. 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$平面 ABC，ΔABC 是等边三角形，点 E，F 分别为 AC，PC 的中点，$PA=1$，$AB=2$．

（1）求证：平面 $BEF\perp$平面 PAC；

（2）在线段 PB 上是否存在点 G，使得直线 AG 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$？若存在，确定点 G 的位置；若不存在，请说明理由．

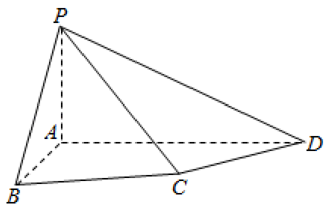


8. 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$底面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 中，$AB\perp AD$，$AB+AD=4$，$CD=\sqrt{2}$，$\angle CDA=45^\circ$．（Ⅰ）求证：平面 $PAB\perp$平面 PAD；

（Ⅱ）设 $AB=AP$．

(i) 若直线 PB 与平面 PCD 所成的角为 30°，求线段 AB 的长；

(ii) 在线段 AD 上是否存在一个点 G，使得点 G 到点 P，B，C，D 的距离都相等？说明理由．

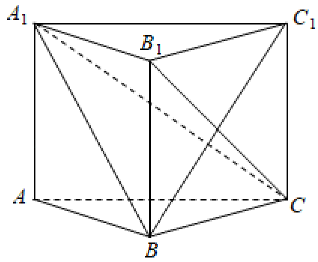


9．如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $BB_1\perp$平面 ABC， $AB\perp BC$， $AA_1=AB=BC=2$.

（Ⅰ）求证： $BC_1\perp$平面 A_1B_1C；

（Ⅱ）求异面直线 B_1C 与 A_1B 所成角的大小；

(Ⅲ)点 M 在线段 B_1C 上，且 $\dfrac{B_1M}{B_1C}=\dfrac{1}{3}$，点 N 在线段 A_1B 上，若 $MN//$平面 A_1ACC_1，求 $\dfrac{A_1N}{A_1B}$ 的值.



立体几何（探索性问题）

1．如图 1，C，D 是以 AB 为直径的圆上两点，且 $AB=2AD$，$AC=BC$，将 ΔABC 所在的半圆沿直径 AB 折起，使得点 C 在平面 ABD 上的射影 E 在 BD 上，如图 2．

（1）求证：$BC\perp$ 平面 ACD；

（2）在线段 AB 上是否存在点 F，使得 $AD//$ 平面 CEF？若存在，求出 $\dfrac{AF}{FB}$ 的值；若不存在，请说明理由．

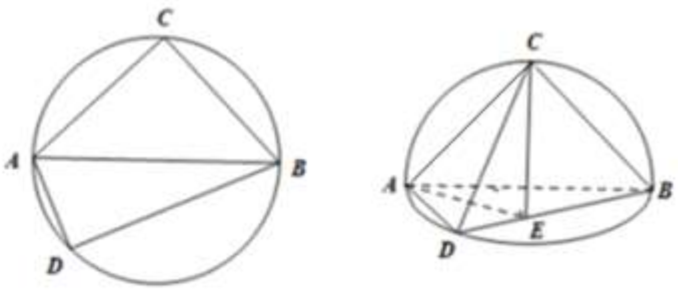


图1　　　　　图2

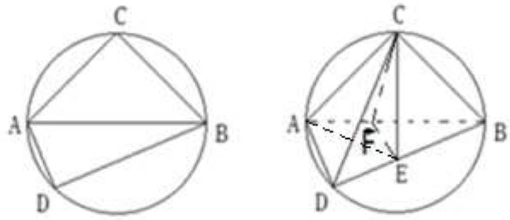


图1　　　　　图2

解：（1）证明：$\because AB$ 是圆的直径，$\therefore AD\perp BD$．$\because CE\perp$ 平面 ABD，$AD\subset$ 平面 ABD，

$\therefore CE\perp AD$．又 $\because CE\cap BD=E$，BD，$CE\subset$ 平面 BCD，$\therefore AD\perp$ 平面 BCD．

$\because BC\subset$ 平面 BCD，$\therefore AD\perp BC$．又 $\because BC\perp AC$，$AC\cap BC=C$，$\therefore BC\perp$ 平面 ACD．

（2）解：连接 AE，$\because CE\perp$ 平面 ABD，AE，$BE\subset$ 平面 ABD，$\therefore CE\perp AE$，$CE\perp BE$．

在 RtΔACE 和 RtΔBCE 中，由 $AC=BC$ 得 $AE=BE$，

在 RtΔABD 中，由 $AB=2AD$，得 $\angle ABD=30^\circ$，$\therefore\angle AED=\angle ABE+\angle BAE=60^\circ$，

$\therefore$ 在 RtΔADE 中，$DE=\dfrac{1}{2}AE$，$\therefore E$ 是 BD 的三等分点，且 $DE=\dfrac{1}{2}EB$．

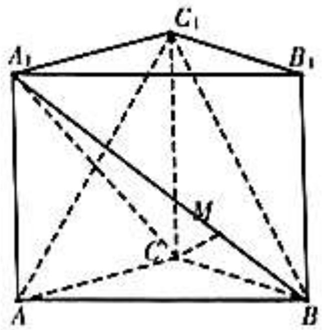
在线段 AB 上存在点 F，使得 $AF=\dfrac{1}{2}FB$，则有 $FE//AD$．$\because FE\subset$ 平面 CEF，$AD\not\subset$ 平面 CEF，$\therefore AD//$ 平面 CEF．

故在线段 AB 上存在点 F，使得 $AD//$ 平面 CEF，此时 $\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{1}{2}$．

2．如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，四边形 AA_1C_1C 是边长为 $\sqrt{3}$ 的正方形，$CC_1\perp BC$，$BC=1$，$AB=2$．

（1）证明：平面 $A_1BC\perp$ 平面 ABC_1；

（2）在线段 A_1B 上是否存在点 M，使得 $CM\perp BC_1$，若存在，求 $\dfrac{BM}{BA_1}$ 的值；若不存在，请说明理由．



解：（1）证明：在 ΔABC 中，$AB=2$，$BC=1$，$AC=\sqrt{3}$，

有 $AC^2+BC^2=AB^2$，可得 $AC\perp BC$，

又 $CC_1\perp BC$，$AC\cap CC_1=C$，可得 $BC\perp$ 平面 AA_1C_1C，即有 $BC\perp AC_1$，

由四边形 AA_1C_1C 是边长为 $\sqrt{3}$ 的正方形，可得 $A_1C\perp AC_1$，

而 $BC\cap A_1C=C$，可得 $AC_1\perp$ 平面 A_1BC，又 $AC_1\subset$ 平面 ABC_1，则平面 $A_1BC\perp$ 平面 ABC_1；

（2）在线段 A_1B 上存在点 M，使得 $CM\perp BC_1$，且 $\dfrac{BM}{BA_1}=\dfrac{1}{4}$．

理由如下：由（1）可得，以 C 为原点，

CA，CB，CC_1 所在直线分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，

如图所示，则 $A(\sqrt{3}，0，0)$，$C(0，0，0)$，$B(0，1，0)$，$A_1(\sqrt{3}，0，\sqrt{3})$，$C_1(0，0，\sqrt{3})$，

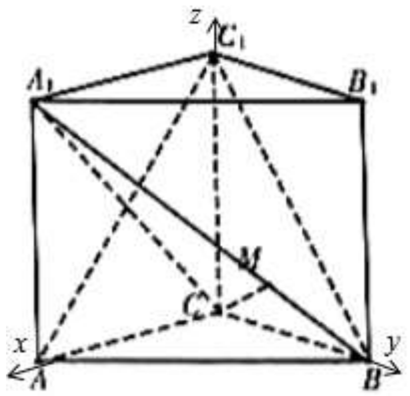
设 $M(x, y, z)$，$\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BA_1}$，

所以 $(x, y-1, z)=\lambda(\sqrt{3}, -1, \sqrt{3})$，解得 $x=\sqrt{3}\lambda$，$y=1-\lambda$，$z=\sqrt{3}\lambda$，

所以 $\overrightarrow{CM}=(\sqrt{3}\lambda, 1-\lambda, \sqrt{3}\lambda)$，$\overrightarrow{C_1B}=(0, 1, -\sqrt{3})$，要使 $CM\perp BC_1$，

则需 $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0$，即 $1-\lambda-3\lambda=0$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{4}$.

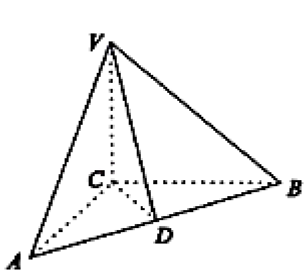
故线段 A_1B 上存在点 M，使得 $CM\perp BC_1$，且 $\dfrac{BM}{BA_1}=\dfrac{1}{4}$.

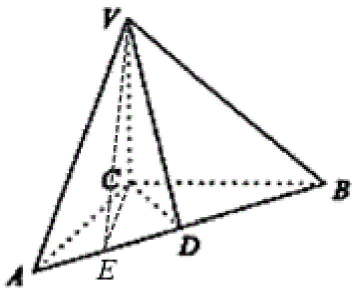


3．如图，在三棱锥 $V-ABC$ 中， $VC\perp$ 底面 ABC， $AC\perp BC$， D 是棱 AB 的中点，且 $AC=BC=VC$．

（1）证明：平面 $VAB\perp$ 平面 VCD；

（2）若 $AC=2\sqrt{2}$，且棱 AB 上有一点 E，使得直线 VD 与平面 VCE 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{15}$，试确定点 E 的位置，并求三棱锥 $C-VDE$ 的体积．





（1）证明：$\because VC\perp$ 底面 ABC， $AC=BC$， $\therefore VA=VB$，

又 D 为 AB 的中点，$\therefore VD\perp AB$， $CD\perp AB$，

$\because VD\cap CD=D$， VD、 $CD\subset$ 平面 VCD， $\therefore AB\perp$ 平面 VCD，

$\because AB\subset$ 平面 VAB， $\therefore$ 平面 $VAB\perp$ 平面 VCD．

（2）解：$\because AC=BC=VC=2\sqrt{2}$， $AC\perp BC$， $\therefore CD=2$，

$\because VC\perp$ 底面 ABC， $\therefore VC\perp CD$， $VC\perp CE$， $\therefore VD=\sqrt{VC^2+CD^2}=2\sqrt{3}$，

设点 D 到平面 VCE 的距离为 d，$\because$ 直线 VD 与平面 VCE 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{15}$，

$\therefore \dfrac{\sqrt{15}}{15}=\dfrac{d}{VD}$， $\therefore d=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$， $\because V_{V-CDE}=V_{D-VCE}$，

$\therefore \dfrac{1}{3}VC\cdot\dfrac{1}{2}CD\cdot DE=\dfrac{1}{3}d\cdot\dfrac{1}{2}VC\cdot CE$， 即 $2\sqrt{2}\times 2\times DE=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{4+DE^2}$， 解得 $DE=1$，

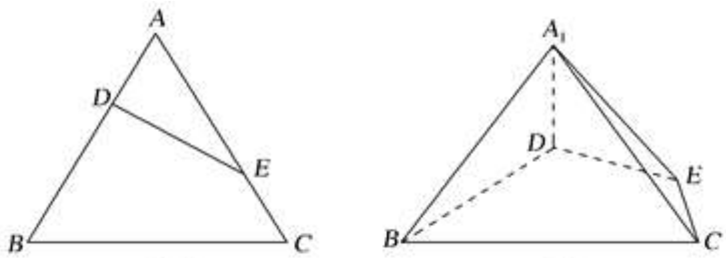
$\because AB=\sqrt{2}AC=4$， $\therefore$ 点 E 为 AB 的四等分点，且 $AE=1$，

$\therefore$ 三棱锥 $C-VDE$ 的体积 $V=V_{V-CDE}=\dfrac{1}{3}VC\cdot\dfrac{1}{2}CD\cdot DE=\dfrac{1}{3}\times 2\sqrt{2}\times\dfrac{1}{2}\times 2\times 1=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$．

4．等边ΔABC的边长为3，点D，E分别是AB，BC上的点，且满足$\frac{AD}{DB}=\frac{CE}{EA}=\frac{1}{2}$（如图（1）），将$\Delta ADE$沿$DE$折起到$\triangle A_1DE$的位置，使面$A_1DE\perp$面$BCED$，连接$A_1B$，$A_1C$（如图（2））.

（1）求证：$A_1D\perp$平面$BCED$；

（2）线段A_1B上是否存在点P，使直线DP与直线EA_1所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{5}}{10}$？若存在，求出$\frac{A_1P}{A_1B}$的值，若不存在，请说明理由.



图(1)　　图(2)

解：（1）证明：题图（1）中，由已知可得：$AE=2$，$AD=1$，$A=60^\circ$，

从而$DE=\sqrt{1^2+2^2-2\times1\times2\times\cos60^\circ}=\sqrt{3}$，故得$AD^2+DE^2=AE^2$，

所以$AD\perp DE$，$BD\perp DE$，所以题图（2）中，$A_1D\perp DE$，$BD\perp DE$，

因为平面$A_1DE\perp$平面$BCED$，平面$A_1DE\cap$平面$BCED=DE$，$A_1D\subset$平面A_1DE，

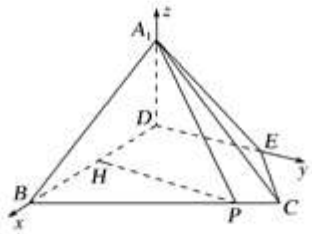
所以$A_1D\perp$平面$BCED$.

（2）存在．由（1）知$ED\perp DB$，$A_1D\perp$平面$BCED$.

以D为坐标原点，以射线DB、DE、DA_1分别为x轴、y轴、z轴的正半轴建立空间直角坐标系$D-xyz$，如图：$D(0,0,0)$，$A_1(0,0,1)$，$B(2,0,0)$，$E(0,\sqrt{3},0)$，

$\overrightarrow{A_1B}=(2,0,-1)$，$\overrightarrow{A_1P}=\lambda\overrightarrow{A_1B}=(2\lambda,0,-\lambda)$，

所以 $P(2\lambda，0，1-\lambda)$，$\overrightarrow{DP}=(2\lambda，0，1-\lambda)$，$\overrightarrow{A_1E}=(0，\sqrt{3}，-1)$，



$|\cos<\overrightarrow{DP}，\overrightarrow{A_1E}>|=\dfrac{|\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{A_1E}|}{|\overrightarrow{DP}||\overrightarrow{A_1E}|}=\dfrac{|\lambda-1|}{2\sqrt{4\lambda^2+(1-\lambda)^2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{10}$，

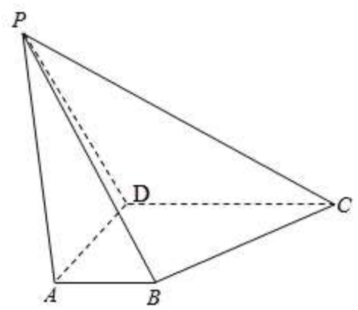
所以 $\lambda=\dfrac{1}{2}$，所以 $\dfrac{A_1P}{A_1B}=\dfrac{1}{2}$．

5．在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $ABCD\perp$ 平面 PCD，底面 $ABCD$ 为直角梯形，$AB//CD$，$AD\perp DC$，且 $AB=1$，$AD=DC=DP=2$，$\angle PDC=120^{\circ}$．

（1）求证：$AD\perp$ 平面 PCD；

（2）线段 BC 上是否存在点 F，使得 $PDF\perp$ 平面 PAC？如果存在，求 $\dfrac{BF}{BC}$ 的值；如果不存在，说明理由；

（3）若 M 是棱 PA 的中点，N 为线段 BC 上任意一点，求证：MN 与 PC 一定不平行．



解：（1）证明：由平面 $ABCD\perp$ 平面 PCD，平面 $ABCD\cap$ 平面 $PCD=CD$，且 $AD\perp DC$，

可得 $AD\perp$ 平面 PCD；

（2）线段 BC 上假设存在点 F，使得 $PDF\perp$ 平面 PAC，设 $CF=t$，

以 D 为坐标原点，DA，DC 所在的直线分别为 x，y 轴，过 D 垂直于 DC 的直线为 z 轴，建立空间直角坐标系 $D-xyz$，

由四边形 $ABCD$ 为直角梯形，且 $AB=1$，$CD=AD=2$，可得 $CB=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，且 $\tan\angle DCB=2$，$\cos\angle DCB=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\sin\angle DCB=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，可得 $F(\dfrac{2t}{\sqrt{5}}，2-\dfrac{t}{\sqrt{5}}，0)$，$P(0，-1，$

$\sqrt{3})$， $D(0，0，0)$， $A(2，0，0)$， $C(0，2，0)$，

$\overrightarrow{PA}=(2，1，-\sqrt{3})$， $\overrightarrow{PC}=(0，3，-\sqrt{3})$， $\overrightarrow{PD}=(0，1，-\sqrt{3})$， $\overrightarrow{DF}=(\frac{2t}{\sqrt{5}}，2-\frac{t}{\sqrt{5}}，0)$，

设平面 PAC 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x_1，y_1，z_1)$，平面 PDF 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(x_2，y_2，z_2)$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{PA}=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{PC}=0\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}2x_1+y_1-\sqrt{3}z_1=0\\ 3y_1-\sqrt{3}z_1=0\end{cases}$，可取 $y_1=\sqrt{3}$，则 $\overrightarrow{n_1}=(\sqrt{3}，\sqrt{3}，3)$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{PD}=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{DF}=0\end{cases}$，可得 $\begin{cases}y_2-\sqrt{3}z_2=0\\ \frac{2t}{\sqrt{5}}x_2+(2-\frac{t}{\sqrt{5}})y_2=0\end{cases}$，取 $y_2=\sqrt{3}$，可得 $\overrightarrow{n_2}=(\frac{\sqrt{3}(t-2\sqrt{5})}{2t}，\sqrt{3}，1)$，

由题意可得 $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=\frac{3(t-2\sqrt{5})}{2t}+3+3=0$，解得 $t=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

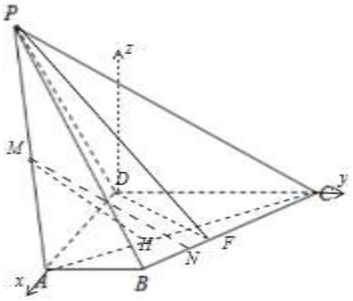
则 $BF=\sqrt{5}-t=\frac{3\sqrt{5}}{5}$，所以存在 F，且 $\frac{BF}{BC}=\frac{3}{5}$；

（3）证明：假设 MN 与 PC 平行，

取 AC 的中点 H，连接 MH，由 MH 为 ΔPAC 的中位线，可得 $MH//PC$，

可得过 M 存在两条直线 MN， MH 与 PC 平行，

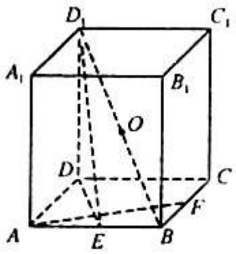
这与过已知直线外一点有且只有一条直线与已知直线平行，矛盾，故 MN 与 PC 一定不平行．



6．如图，在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为 AB 的中点，F 为 BC 的中点，O 为 BD_1 的中点．

（1）求证：$AF\perp$ 平面 DD_1E；

（2）线段 AF 上是否存在点 G，使得 $OG//$ 平面 DD_1E，若存在，求出 $\dfrac{AG}{GF}$ 的值，若不存在，请说明理由．



（1）证明：以 D 为原点，以 DA，DC，DD_1 为坐标轴建立空间直角坐标系 $D-xyz$，

设 $AB=a$，$AA_1=b$，则 $A(a，0，0)$，$F(\dfrac{a}{2}，a，0)$，$D(0，0，0)$，$D_1(0，0，b)$，$E(a，\dfrac{a}{2}，0)$，

$\therefore \overrightarrow{AF}=(-\dfrac{a}{2}，a，0)$，$\overrightarrow{DE}=(a，\dfrac{a}{2}，0)$，$\overrightarrow{DD_1}=(0，0，b)$，

$\therefore \overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DE}=-\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{a^2}{2}+0=0$，$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DD_1}=0+0+0=0$，

$\therefore \overrightarrow{AF}\perp\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{AF}\perp\overrightarrow{DD_1}$，即 $AF\perp DE$，$AF\perp DD_1$，又 $DE\cap DD_1=D$，$\therefore AF\perp$ 平面 DD_1E．

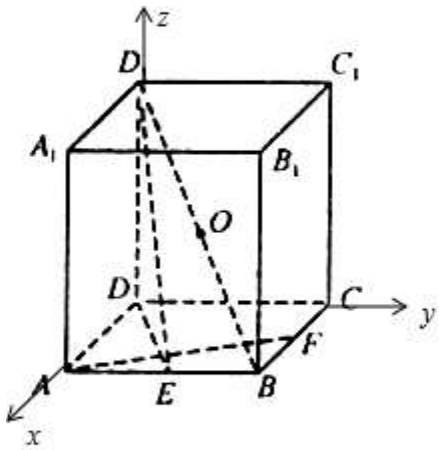
（2）解：由（1）可知 $\overrightarrow{AF}=(-\dfrac{a}{2}，a，0)$ 为平面 DD_1E 的一个法向量，

设线段 AF 上存在点 G，使得 $OG//$ 平面 DD_1E，不妨设 $\overrightarrow{AG}=\lambda\overrightarrow{AF}=(-\dfrac{\lambda a}{2}，\lambda a，0)$，

又 $O(\dfrac{a}{2}，\dfrac{a}{2}，\dfrac{b}{2})$，$\therefore \overrightarrow{AO}=(-\dfrac{a}{2}，\dfrac{a}{2}，\dfrac{b}{2})$，$\therefore \overrightarrow{OG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AO}=(-\dfrac{\lambda a}{2}+\dfrac{a}{2}，\lambda a-\dfrac{a}{2}，-\dfrac{b}{2})$，

$\because OG//$ 平面 DD_1E，$\therefore \overrightarrow{OG}\perp\overrightarrow{AF}$，$\therefore \overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AF}=\dfrac{\lambda a^2}{4}-\dfrac{a^2}{4}+\lambda a^2-\dfrac{a^2}{2}=0$，解得 $\lambda=\dfrac{3}{5}$，

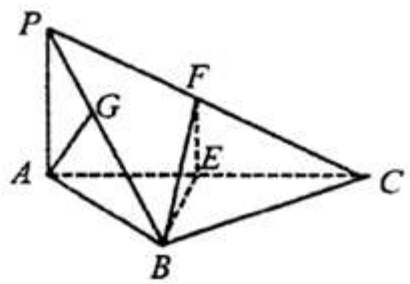
$\therefore$线段 AF 上存在点 G，使得 $OG//$平面 DD_1E，且 $\dfrac{AG}{GF}=\dfrac{3}{2}$.



7. 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$平面 ABC，ΔABC 是等边三角形，点 E，F 分别为 AC，PC 的中点，$PA=1$，$AB=2$.

（1）求证：平面 $BEF\perp$平面 PAC；

（2）在线段 PB 上是否存在点 G，使得直线 AG 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$？若存在，确定点 G 的位置；若不存在，请说明理由.



解：（1）证明：$\because PA\perp$平面 ABC，$PA\subset$平面 PAC，

$\therefore$平面 $PAC\perp$平面 ABC.

$\because AB=BC$，E 为 AC 的中点，$\therefore BE\perp AC$.

又平面 $PAC\cap$平面 $ABC=AC$，$BE\subset$平面 ABC，

$\therefore BE\perp$平面 PAC，又 $BE\subset$平面 BEF，

$\therefore$平面 $BEF\perp$平面 PAC.

（2）解：$\because PA\perp$ 平面 ABC，$\therefore PA\perp AC$，

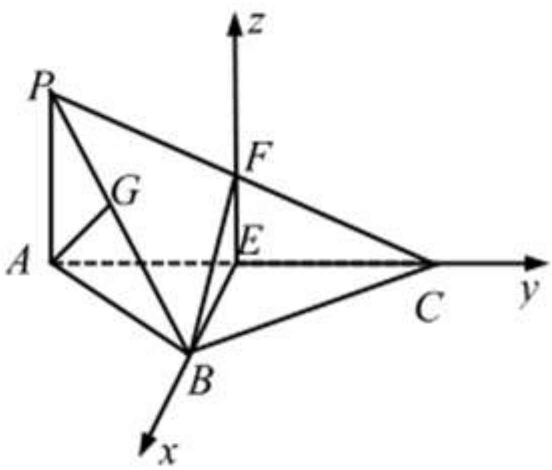
又点 E，F 分别为 AC，PC 的中点，

所以 $EF//PA$，从而 $EF\perp AC$．

又由于 $BE\perp$ 平面 PAC，$\therefore BE\perp AC$，$BE\perp EF$，

所以 EB，EC，EF 两两互相垂直.

以 E 为坐标原点，分别以 $\overrightarrow{EB}$，$\overrightarrow{EC}$，$\overrightarrow{EF}$ 方向为 x，y，z 轴正方向建立如图坐标系.



由于 $A(0,-1,0)$，$P(0,-1,1)$，$B(\sqrt{3},0,0)$，$C(0,1,0)$，

于是 $\overrightarrow{BP}=(-\sqrt{3},-1,1)$，$\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{3},1,0)$．

设平面 PBC 的法向量 $\overrightarrow{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}-\sqrt{3}x-y+z=0\\-\sqrt{3}x+y=0\end{cases}$，

取 $x=1$，则 $y=\sqrt{3}$，$z=2\sqrt{3}$，

于是 $\overrightarrow{n}=(1,\sqrt{3},2\sqrt{3})$．$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{3},1,0)$，

设 $\overrightarrow{BG}=\lambda\overrightarrow{BP}=(-\sqrt{3}\lambda,-\lambda,\lambda)$，$\lambda\in[0,1]$，

则 $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}=(\sqrt{3}(1-\lambda),-\lambda+1,\lambda)$．

由 $\frac{|\overrightarrow{AG}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{AG}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{\sqrt{15}}{5}\Rightarrow\frac{2\sqrt{3}}{4\cdot\sqrt{5\lambda^2-8\lambda+4}}=\frac{\sqrt{15}}{5}\Rightarrow\lambda=\frac{1}{2}$ 或 $\lambda=\frac{11}{10}$ （舍去）.

故存在满足条件的 G 点， G 点是线段 PB 的中点.

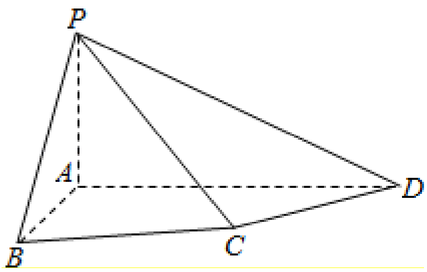
8. 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 中，$AB\perp AD$，$AB+AD=4$，$CD=\sqrt{2}$， $\angle CDA=45^\circ$.

（Ⅰ）求证：平面 $PAB\perp$ 平面 PAD；

（Ⅱ）设 $AB=AP$.

(i) 若直线 PB 与平面 PCD 所成的角为 30°， 求线段 AB 的长；

(ii) 在线段 AD 上是否存在一个点 G， 使得点 G 到点 P， B， C， D 的距离都相等？说明理由.



解：(I) 证明：$\because PA\perp$ 平面 $ABCD$， $AB\subset$ 平面 $ABCD$

$\therefore PA\perp AB$

又 $\because AB\perp AD$， $PA\cap AD=A$

$\therefore AB\perp$ 平面 PAD

又 $\because AB\subset$ 平面 PAB，

$\therefore$ 平面 $PAB\perp$ 平面 PAD

$(II)(i)$ 以 A 为坐标原点，建立空间直角坐标系 $A-xyz$ （如图）

在平面 $ABCD$ 内，作 $CE//AB$ 交于点 E，

则 $CE\perp AD$

在 Rt△CDE 中， $DE=CD\cdot\cos45^\circ=1$，

$CE=CD\cdot\sin45^\circ=1$

设 $AB=AP=t$，则 $B(t，0，0)$， $P(0，0，t)$

由 $AB+AD=4$，得 $AD=4-t$，

所以 $E(0，3-t，0)$， $C(1，3-t，0)$， $D(0，4-t，0)$

$\overrightarrow{CD}=(-1,1,0)$， $\overrightarrow{PD}=(0,4-t,-t)$

设平面 PCD 的法向量为 $\vec{n}=(x，y，z)$

由 $\vec{n}\perp\overrightarrow{CD}$， $\vec{n}\perp\overrightarrow{PD}$，得 $\begin{cases}-x+y=0\\(4-t)y-tz=0\end{cases}$

取 $x=t$，得平面 PCD 的一个法向量为 $\vec{n}=(t,t,4-t)$

又 $\overrightarrow{PB}=(t,0,-t)$，故由直线 PB 与平面 PCD 所成的角为 30° 得

$\cos(90^\circ-30^\circ)=\dfrac{1}{2}=\dfrac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{PB}|}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{PB}|}$

即 $\dfrac{|2t^2-4t|}{\sqrt{t^2+0+(-t)^2}\sqrt{t^2+t^2+(4-t)^2}}=\dfrac{1}{2}$

解得 $t=\dfrac{4}{5}$ 或 $t=4$（舍去，因为 $AD=4-t>0$)

所以 $AB=\dfrac{4}{5}$

(ii) 假设在线段 AD 上存在一个点 G 到 P 、 B 、 C 、 D 的距离都相等

由 $GC=GD$，得 $\angle GCD=\angle GDC=45^\circ$

从而 $\angle CGD=90^\circ$，即 $CG\perp AD$

所以$GD = CD \cdot \cos 45° = 1$

设$AB = \lambda$，则$AD = 4 - \lambda$，$AG = AD - GD = 3 - \lambda$

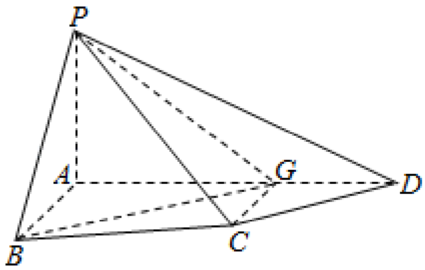
在 Rt∆ABG 中，

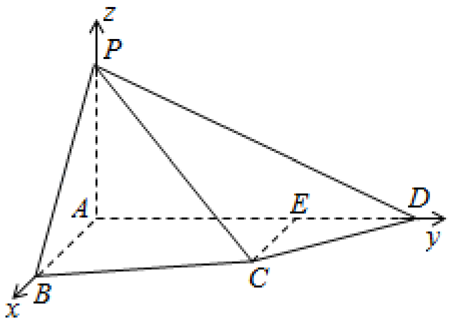
$$GB = \sqrt{AB^2 + AG^2} = \sqrt{\lambda^2 + (3-\lambda)^2} = \sqrt{2(\lambda - \frac{3}{2})^2 + \frac{9}{2}} > 1$$

这$GB = GD$与矛盾.

所以在线段AD上不存在一个点G，使得点G到B、C、D的距离都相等.

从而，在线段AD上不存在一个点G，使得点G到点P、B、C、D的距离都相等.



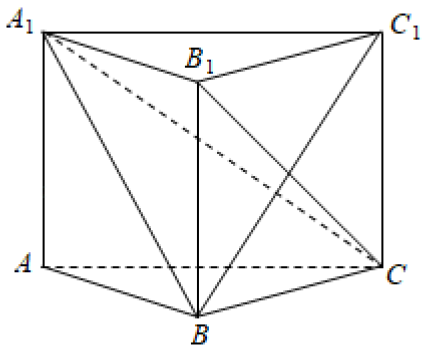


9．如图，在三棱柱$ABC - A_1B_1C_1$中，$BB_1 \perp$平面ABC，$AB \perp BC$，$AA_1 = AB = BC = 2$.

（Ⅰ）求证：$BC_1 \perp$平面A_1B_1C；

（Ⅱ）求异面直线B_1C与A_1B所成角的大小；

（Ⅲ）点M在线段B_1C上，且$\frac{B_1M}{B_1C} = \frac{1}{3}$，点$N$在线段$A_1B$上，若$MN //$平面$A_1ACC_1$，求$\frac{A_1N}{A_1B}$的值.



解：（Ⅰ）证明：∵在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，

$BB_1\perp$ 平面 ABC， $AB\perp BC$， $AA_1=AB=BC=2$.

$\therefore BC_1\perp B_1C$， $BB_1\perp A_1B_1$， $A_1B_1\perp B_1C_1$，

∵ $BB_1\cap B_1C_1=B_1$， $\therefore A_1B_1\perp$ 平面 BCC_1B_1，

∵ $BC_1\subset$ 平面 BCC_1B_1， $\therefore A_1B_1\perp BC_1$，

∵ $A_1B_1\cap B_1C=B_1$， $\therefore BC_1\perp$ 平面 A_1B_1C .

（Ⅱ）以 B 为原点， BC 为 x 轴， BA 为 y 轴， BB_1 为 z 轴，建立空间直角坐标系，

$B_1(0，0，2)$， $C(2，0，0)$， $A_1(0，2，2)$， $B(0，0，0)$，

$\overrightarrow{B_1C}=(2，0，-2)$， $\overrightarrow{A_1B}=(0，-2，-2)$，

设异面直线 B_1C 与 A_1B 所成角为 θ，

则 $\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{B_1C}\cdot\overrightarrow{A_1B}|}{|\overrightarrow{B_1C}|\cdot|\overrightarrow{A_1B}|}=\dfrac{4}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{8}}=\dfrac{1}{2}$， $\therefore\theta=60^\circ$.

$\therefore$ 异面直线 B_1C 与 A_1B 所成角的大小为 60° .

（Ⅲ）解： $A(0，2，0)$， $C(2，0，0)$， $C_1(2，0，2)$， $B(0，0，0)$， $B_1(0，0，2)$， $A_1(0， 2， 2)，

$\overrightarrow{CA}=(-2，2，0)$， $\overrightarrow{CC_1}=(0，0，2)$，

设平面 ACC_1A_1 的法向量 $\vec{n}=(x，y，z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CA}=-2x+2y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CC_1}=2z=0\end{cases}$ ，取 $x=1$，得 $\vec{n}=(1，1，0)$，

点 M 在线段 B_1C 上，且 $\dfrac{B_1M}{B_1C}=\dfrac{1}{3}$，点 N 在线段 A_1B 上，

设 $M(a，b，c)$，$N(x，y，z)$，$\dfrac{A_1N}{A_1B}=\lambda$，则 $\overrightarrow{BC_1}=3\overrightarrow{B_1M}$，$\overrightarrow{A_1N}=\lambda\overrightarrow{A_1B}$，$0\leqslant\lambda\leqslant1$，

即 $(2，0，-2)=3(a，b，c-2)$，$(x，y-2，z-2)=\lambda(0，-2，-2)$，

解得 $M(\dfrac{2}{3}，0，\dfrac{4}{3})$，$N(0，2-2\lambda，2-2\lambda)$，$\overrightarrow{MN}=(-\dfrac{2}{3}，2-2\lambda，\dfrac{2}{3}-2\lambda)$，

$\because MN//$平面 A_1ACC_1，$\therefore \vec{n}\cdot\overrightarrow{MN}=-\dfrac{2}{3}+2-2\lambda=0$，

解得 $\lambda=\dfrac{2}{3}$．

$\therefore \dfrac{A_1N}{A_1B}$ 的值为 $\dfrac{2}{3}$．