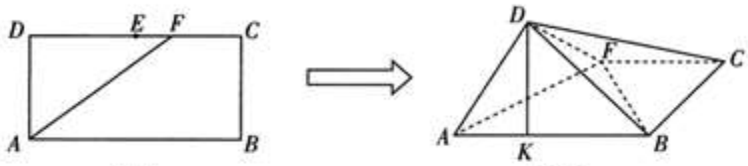
二轮大题专练18—立体几何（折叠问题）

1．如图①，在长方形$ABCD$中，$AB=2$，$BC=1$，E为DC的中点，F为线段EC（端点除外）上一动点．现将ΔAFD沿AF折起（如图②），使得平面$ABD\perp$平面$ABCF$．



图①　图②

（1）判断AD是否与BD垂直，并说明理由．

（2）图②中，在平面ABD内过点D作$DK\perp AB$，K为垂足，求AK的取值范围．

解：（1）AD与BD不垂直．证明过程如下：

若$AD\perp BD$，

$\because AD\perp DF$，$BD\cap DF=D$，BD、$DF\subset$平面BDF，$\therefore AD\perp$平面BDF，$\therefore AD\perp BF$，

$\because BC\perp AB$，平面$ABD\perp$平面$ABCF$，平面$ABD\cap$平面$ABCF=AB$，$BC\subset$平面$ABCF$，

$\therefore BC\perp$平面ABD，$\therefore BC\perp AD$，

又$BF\cap BC=B$，BF、$BC\subset$平面$ABCF$，$\therefore AD\perp$平面$ABCF$，$\therefore AD\perp AB$，

在翻折后的ΔABD中，这是不可能的，

故AD与BD不垂直．

（2）设$AK=t$，$CF=x(0<x<1)$，则$DF=2-x$，

$\because DK\perp AB$，平面$ABD\perp$平面$ABCF$，平面$ABD\cap$平面$ABCF=AB$，$DK\subset$平面ABD，

$\therefore DK\perp$平面$ABCF$，$\therefore DK\perp KF$，

由勾股定理知，$DK^2=1-t^2$，$KF^2=1+(2-t-x)^2$，

$\because DF^2 = DK^2 + KF^2$，$\therefore (2-x)^2 = 1 - t^2 + 1 + (2-t-x)^2$，

化简整理得，$t = \dfrac{1}{2-x}$，在 $x \in (0,1)$ 上单调递增，$\therefore \dfrac{1}{2} < t < 1$，

故 AK 的取值范围为 $(\dfrac{1}{2}，1)$．

2．如图 1，已知菱形 $AECD$ 的对角线 AC，DE 交于点 F，点 E 为 AB 的中点．将三角形 ADE 沿线段 DE 折起到 PDE 的位置，如图 2 所示．

（Ⅰ）求证：$DE \perp PC$；

（Ⅱ）试问平面 PFC 与平面 PBC 所成的二面角是否为 $90°$，如果是，请证明；如果不是，请说明理由；

（Ⅲ）在线段 PD，BC 上是否分别存在点 M，N，使得平面 $CFM//$ 平面 PEN？若存在，请指出点 M，N 的位置，并证明；若不存在，请说明理由．

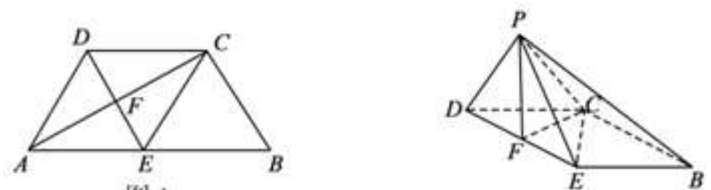


图 1　　图 2

解：（Ⅰ）证明：折叠前，$\because$ 四边形 $AECD$ 是菱形，$\therefore AC \perp DE$，

$\therefore$ 折叠后，$DE \perp PF$，$DE \perp CF$，

$\because PF \cap CF = F$，$\therefore DE \perp$ 平面 PCF，

$\because PC \subset$ 平面 PCF，$\therefore DE \perp PC$．

（Ⅱ）解：平面 PFC 与平面 PBC 所成的二面角为 $90°$．

证明如下：

$\because$ 四边形 $AECD$ 是菱形，$\therefore DC//AE$，$DC = AE$，

又点 E 为 AB 的中点，$\therefore DC//EB$，$DC = EB$，

$\therefore$四边形$DEBC$是平行四边形，$\therefore CB//DE$，

由（Ⅰ）得，$DE\perp$平面PCF，$\therefore CB\perp$平面PCF，

$\because CB\subset$平面PBC，$\therefore$平面$PBC\perp$平面PCF，

$\therefore$平面PFC与平面PBC所成的二面角为90°.

（Ⅲ）解：在线段PD，BC上是分别存在点M，N，

且M，N分别是PD，BC的中点，使得平面$CFM//$平面PEN.

证明如下：

如图，分别取PD，BC的中点M，N，连结EN，PN，MF，CM，

$\because$四边形$DEBC$是平行四边形，$\therefore EF//CN$，$EF=\dfrac{1}{2}BC=CN$，

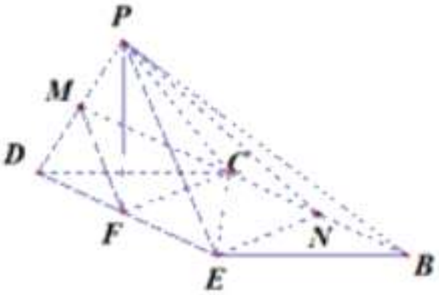
在ΔPDE中，M，F分别是PD，DE的中点，$\therefore MF//PE$，

$\because F$、N分别是DE、BC的中点，四边形$DEBC$是平行四边形，

$\therefore EF\underset{=}{//}CN$，$\therefore$四边形$EFCN$是平行四边形，$\therefore CF//EN$，

又EN，$PE\subset$平面PEN，$PE\cap EN=E$，MF，$CF\subset$平面CFM，

$\therefore$平面$CFM//$平面PEN.



3．如图1，在直角梯形$ABCD$中，$AB//DC$，$\angle BAD=90^{\circ}$，$AB=8$，$AD=4$，$DC=6$，点E在CD上，且$DE=4$，将三角形ADE沿线段AE折起到PAE的位置，$PB=4\sqrt{3}$（如图

2).

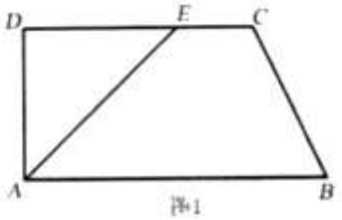


图1

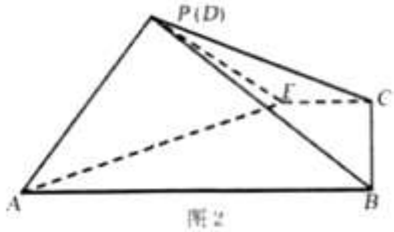


图2

（Ⅰ）求证：平面 $PAE \perp$ 平面 $ABCE$；

（Ⅱ）在线段 PB 上是否存在点 M，使 $CM//$ 平面 PAE？若存在，求出 $\dfrac{PM}{MB}$ 的值；若不存在，说明理由．

解：（Ⅰ）证明：取 AE 的中点 G，连接 PG，GB，

在 ΔAGB 中，由余弦定理可得 $BG^2=(2\sqrt{2})^2+8^2-2\cdot 2\sqrt{2}\cdot 8\cdot\cos\dfrac{\pi}{4}=40$，

$PB^2=48=BG^2+PG^2$，所以 $PG\perp GB$，

因为 $PA=PE$，$AG=GE$，所以 $PG\perp AE$，

又 $AE\cap GB=G$，$AE\subset$ 面 $ABCE$，$GB\subset$ 面 $ABCE$，

所以 $PG\perp$ 面 PAE，

又 $PG\subset$ 面 PAE，所以面 $PAE\perp$ 面 $ABCE$；

（Ⅱ）存在 M，满足 $\dfrac{PM}{MB}=\dfrac{1}{3}$，使得 $CM//$ 平面 PAE．

证明：取 AB 的三等分点 N，且 $AN=2$，连接 CN，则 $EC//AN$，且 $EC=AN=2$，

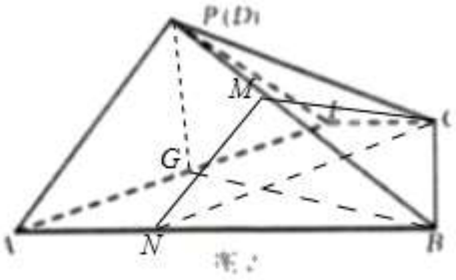
所以四边形 $EANC$ 为平行四边形，可得 $CN//EA$，又 $\dfrac{BN}{NA}=\dfrac{BM}{MP}=3$，所以 $MN//AP$，

又 $CN//EA$，$CN\not\subset$ 面 PAE，$AE\subset$ 面 PAE，所以 $CN//$ 面 PAE，

同理可得 $MN//$ 面 PAE，又 $MN\cap NC=N$，

所以面 $CMN//$ 面 PAE，$CM\subset$ 面 CMN，

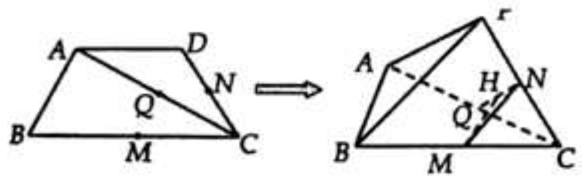
可得 $CM//$ 面 PAE .



4．如图，在等腰梯形 $ABCD$ 中， $AD//BC$ ， $AD=AB=CD=2$ ， $BC=4$ ， M ， N ， Q 分别为 BC ， CD ， AC 的中点，以 AC 为折痕将 ΔACD 折起，使点 D 到达点 P 位置 $(P\notin$ 平面 $ABC)$.

（1）若 H 为直线 QN 上任意一点，证明： $MH//$ 平面 ABP ；

（2）若直线 AB 与 MN 所成角为 $\dfrac{\pi}{4}$ ，求三棱锥 $P-ABC$ 的表面积.



解：（1）证明：连接 QM .

Q m ， N ， Q 分别是 BC ， CD ， AC 的中点， $\therefore QM//AB$ ，

Q $QM\not\subset$ 平面 PAB ， $AB\subset$ 平面 PAB ，

$\therefore QM//$ 平面 PAB ，

同理 $QN//$ 平面 PAB ，

Q $QM\subset$ 平面 MNQ ， $QN\subset$ 平面 MNQ ， QM I $QN=Q$ ，

$\therefore$ 平面 $MNQ//$ 平面 PAB ，

Q $MH\subset$ 平面 MNQ ， $\therefore MH//$ 平面 PAB .

（2）解：在等腰梯形 $ABCD$ 中，作 $AE \perp BC$ 于 E， $DF \perp BC$ 于 F，

由题意得 $EF = AD = 2$， $BC = 4$， $\therefore \cos\angle ABE = \dfrac{BE}{AB} = \dfrac{1}{2}$，

$\therefore \angle ABE = \dfrac{\pi}{3}$，

$\because \angle ABE$ 与 $\angle ADC$ 互补，$\therefore \angle ADC = \dfrac{2\pi}{3}$，

在 ΔADC 中， $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cdot \cos\angle ADC} = 2\sqrt{3}$，

$\therefore BC^2 = AB^2 + AC^2$， $\therefore AB \perp AC$，

$\because BP // MN$， $\angle ABP$ 为锐角，

$\therefore \angle ABP = \dfrac{\pi}{4}$ 为直线 AB 与 MN 所成角，

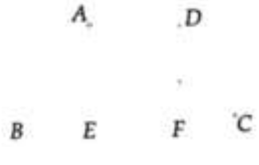
$\because AB = AP = 2$， $\therefore \Delta ABP$ 为等腰直角三角形， $\therefore BP = 2\sqrt{2}.$

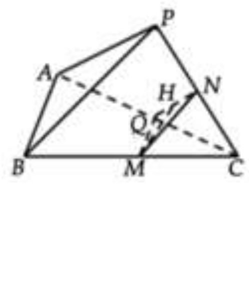
$\therefore$ 三棱锥 $P - ABC$ 的表面积为：

$S = S_{\Delta PAB} + S_{\Delta PBC} + S_{\Delta PAC} + S_{\Delta ABC}$

$= \dfrac{1}{2} \times 2 \times 2 + \dfrac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 4 \times \sqrt{1 - (\dfrac{8+16-4}{2 \times 2\sqrt{2} \times 4})^2} + \dfrac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} + \dfrac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3}$

$= 2 + \sqrt{7} + 3\sqrt{3}$.





5．如图，已知图 1 中 ΔABC 是等腰三角形，$AC=BC$，D，E 分别是 AC，BC 的中点，沿着 DE 把 ΔCDE 折起到△$C'DE$，使得平面 $C'DE\perp$ 平面 $BADE$，图 2 中 $AD=\sqrt{2}$，$AB=4$，F 为 BC' 的中点，连接 EF．

（Ⅰ）求证：$EF//$ 平面 $AC'D$；

（Ⅱ）求四棱锥 $C'-ABED$ 的侧面积．

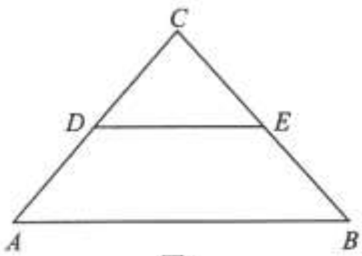


图 1

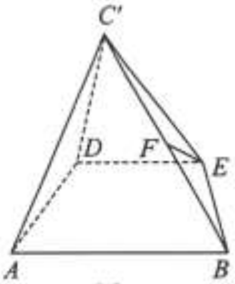


图 2

（Ⅰ）证明：取 AC' 中点 G，连接 DG，FG，

由点 F、G 分别是 BC'，AC' 的中点，

得 $GF//AB$，$GF=\frac{1}{2}AB$，

又 $DE//AB$，$DE=\frac{1}{2}AB$．

所以四边形 $DEFG$ 是平行四边形，

所以 $DG//EF$，且 $EF\not\subset$ 平面 $AC'D$，

$DG\subset$ 平面 $AC'D$，

所以 $EF//$ 平面 $AC'D$；

（Ⅱ）因为 ΔABC 是等腰三角形，$AC=BC$，$AD=\sqrt{2}$，$AB=4$，

所以 $\angle ACB=90^{\circ}$，

所以 ΔABC 是等腰直角三角形，且 $AC=BC=2\sqrt{2}$．

分别取DE、AB的中点H、I，

连接$C'H$，HI，$C'I$，从而有$C'H\perp DE$．

又因为平面$C'DE\perp$平面$BADE$，平面$C'DE\cap$平面$BADE=DE$，

所以$C'H\perp$平面$BADE$，

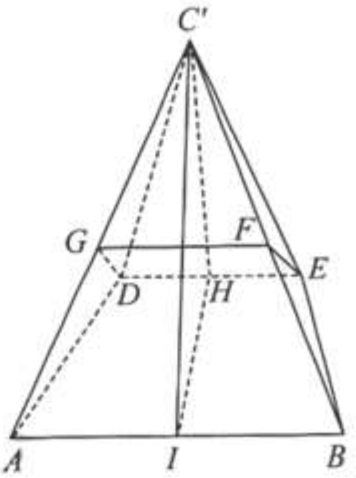
又$HI\subset$平面$BADE$，所以$C'H\perp HI$，

在$\triangle C'HI$中，$C'H=HI=1$，$\therefore C'I=\sqrt{2}$，

又翻折后，$C'A=C'B$，在$\triangle C'IA$中，$C'A=\sqrt{6}$，

$\therefore$四棱锥$C'-ABED$的侧面积为：

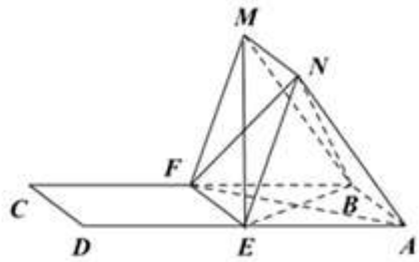
$$S=\frac{1}{2}\times2\times1+2\times\frac{1}{2}\times\sqrt{(\sqrt{2})^2-(\frac{\sqrt{6}}{2})^2}\times\sqrt{6}+\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{2}=1+\sqrt{3}+2\sqrt{2}.$$



6．如图，平行四边形$ABCD$中，$AD=2AB=6$，E，F分别为AD，BC的中点．以EF为折痕把四边形$EFCD$折起，使点C到达点M的位置，点D到达点N的位置，且$NF=NA$．

（1）求证：平面$AFN\perp$平面NEB；

（2）若$BE=2\sqrt{3}$，求点F到平面BEM的距离．



解：(1) 证明：记 $AF \cap BE = O$，连结 NO，

由题意知四边形 $ABFE$ 是菱形，$\therefore AF \perp BE$，且 O 是 AF 、BE 的中点，

$\because NF = NA$，$\therefore AF \perp NO$，

$\because NO \cap BE = O$，$NO \subset$ 平面 NEB，$BE \subset$ 平面 NEB，

$\therefore AF \perp$ 平面 NEB，

$\because AF \subset$ 平面 AFN，$\therefore$ 平面 $AFN \perp$ 平面 NEB.

(2) 解：由 (1) 知 $NO \perp AF$，且 $AF \cap BE = O$，$AF \subset$ 平面 $ABFE$，$BE \subset$ 平面 $ABFE$，

$\therefore NO \perp$ 平面 $ABFE$，

以 O 为原点，OE 为 x 轴，OA 为 y 轴，ON 为 z 轴，建立空间直角坐标系，

$A(0，\sqrt{6}，0)$，$B(-\sqrt{3}，0，0)$，$E(\sqrt{3}，0，0)$，$F(0，-\sqrt{6}，0)$，$N(0，0，\sqrt{6})$，

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{AB} = (0，0，\sqrt{6}) + (-\sqrt{3}, -\sqrt{6}，0) = (-\sqrt{3}，-\sqrt{6}，\sqrt{6})$，

$\therefore M(-\sqrt{3}，-\sqrt{6}，\sqrt{6})$，

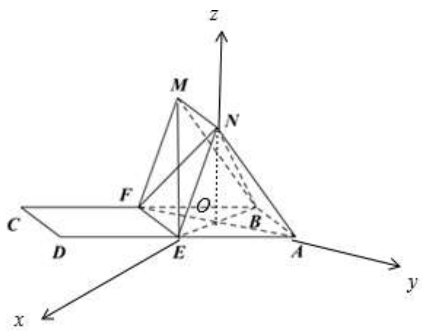
$\overrightarrow{MN} = (\sqrt{3}, \sqrt{6}，0)$，$\overrightarrow{BE} = (2\sqrt{3}，0，0)$，$\overrightarrow{BM} = (0，-\sqrt{6}，\sqrt{6})$，$\overrightarrow{BF} = (\sqrt{3}，-\sqrt{6}，0)$，

设平面 BEM 的法向量 $\vec{n} = (x，y，z)$，

则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BE} = 2\sqrt{3}x = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BM} = -\sqrt{6}y + \sqrt{6}z = 0 \end{cases}$，取 $y = 1$，得 $\vec{n} = (0，1，1)$，

则点 F 到平面 BEM 的距离为：

$$d=\frac{|\overrightarrow{BF}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}.$$



7．如图 1，梯形 $ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，过 A，B 分别作 $AE\perp CD$，$BF\perp CD$，垂足分别为 E、F．若 $AB=AE=2$，$CD=5$，$DE=1$，将梯形 $ABCD$ 沿 AE，BF 折起，且平面 $ADE\perp$ 平面 $ABFE$（如图 2）．

（Ⅰ）证明：$AF\perp BD$；

（Ⅱ）若 $CF\parallel DE$，在线段 AB 上是否存在一点 P，使得直线 CP 与平面 ACD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{18}$，若存在，求出 AP 的值，若不存在，说明理由．

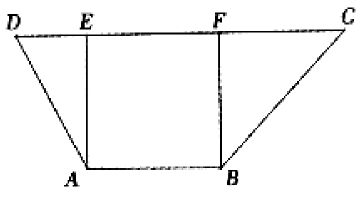


图 1

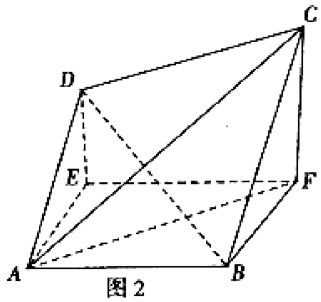


图 2

解：（Ⅰ）证明：∵平面 $ADE\perp$ 平面 $ABFE$，$DE\subset$ 平面 ADE，

平面 $ADE\cap$ 平面 $ABFE=AE$，$DE\perp AE$，

∴$DE\perp$ 平面 $ABFE$，又 $AF\subset$ 平面 $ABFE$，∴$DE\perp AF$，

又正方形 $ABFE$ 中，$AF\perp BE$，且 $BE\cap DE=E$，

$DE \subset$ 平面 BDE，$BE \subset$ 平面 BDE，

∴$AF \perp$ 平面 BDE，

∵$BD \subset$ 平面 BDE，∴$AF \perp BD$.

（Ⅱ）解：由（Ⅰ）知，DE、EA、EF 两两垂直，如图建立空间直角坐标系，

∵$CF \parallel DE$，$CF \perp$ 平面 $ABFE$，

则 A（2，0，0），B（2，2，0），C（0，2，2），D（0，0，1），

$\overrightarrow{AD}=(-2,0,1)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,2,2)$，

设平面 ACD 的一个法向量 $\overrightarrow{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{n}=-2x+z=0\\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{n}=-2x+2y+2z=0\end{cases}$，取 $x=1$，得 $\overrightarrow{n}=(1,-1,2)$，

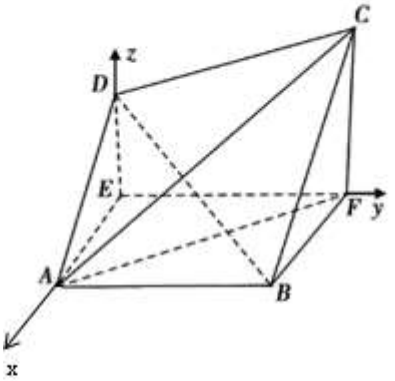
设 P（2，t，0），且 $0\leqslant t\leqslant 2$，则 $\overrightarrow{CP}=(2,t-2,-2)$，

设直线 CP 与平面 ACD 所成角为 θ

∵在线段 AB 上存在一点 P，使得直线 CP 与平面 ACD 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{18}$，

∴$\sin\theta=\dfrac{|\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{CP}|}{|\overrightarrow{n}|\cdot|\overrightarrow{CP}|}=\dfrac{|2+2-t-4|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{8+(t-2)^2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{18}$，解得 $t=1$ 或 $t=-\dfrac{3}{2}$（舍）.

∴$AP=1$.



8．如图 1，在梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$\angle BAD=\frac{\pi}{2}$，$AB=BC=1$，$AD=2$，E 是 AD 的中点，O 是 AC 与 BE 的交点，以 BE 为折痕把△ABE 折起使点 A 到达点 A_1 的位置，且 $A_1C=1$，如图 2．

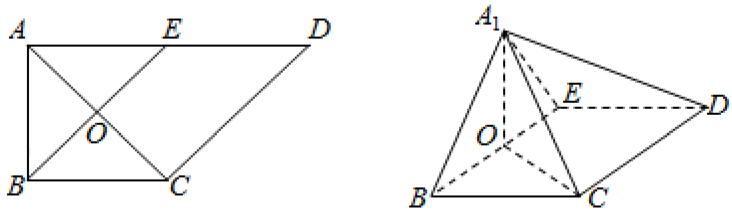


图1　　图2

（1）证明：平面 $A_1BE\perp$ 平面 $BCDE$；

（2）求二面角 $C-A_1B-E$ 的余弦值．

证明：（1）在图（1）中，∵$AD\parallel BC$，$AB=BC=1$，$AD=2$，

E 是 AD 的中点，$\angle BAD=\frac{\pi}{2}$，

∴四边形 $ABCE$ 为正方形，∴$BE\perp AC$，$AO=OC$，

即在图 2 中，$A_1O\perp BE$，$BE\perp OC$，$A_1O=OC=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∵$A_1C=1$，∴在△A_1OC 中，$A_1O^2+OC^2=A_1C^2$，

∴$A_1O\perp OC$，

∴$A_1O\perp$ 平面 $BCDE$，

∵$A_1O\subset$ 平面 A_1BE，∴平面 $A_1BE\perp$ 平面 $BCDE$．

解：（2）由（1）知 OA_1，OB，OC 互相垂直，分别以 OB，OC，OA_1 所在直线为 x，y，z 轴，建立空间直角坐标系，

∵$A_1B=A_1E=BC=ED=1$，

∴O（0，0，0），B（$\frac{\sqrt{2}}{2}$，0，0），A_1（0，0，$\frac{\sqrt{2}}{2}$），C（0，$\frac{\sqrt{2}}{2}$，0），

$\therefore \overrightarrow{BC}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$，$\overrightarrow{A_1C}=\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\overrightarrow{OC}=\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$，

设平面 A_1BC 的法向量$\overrightarrow{\pi}=(x, y, z)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{BC}=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y=0\\ \overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{A_1C}=\frac{\sqrt{2}}{2}y-\frac{\sqrt{2}}{2}z=0\end{cases}$，取 $x=1$，得$\overrightarrow{\pi}=(1, 1, 1)$，

由（1）得平面 $A_1BE\perp$平面 $BCDE$，且 $OC\perp BE$，

$\therefore OC\perp$平面 A_1BE，$\therefore \overrightarrow{OC}=\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$是平面 A_1BE 的法向量，

设二面角 $C-A_1B-E$ 的平面角为 θ，

则 $\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{OC}|}{|\overrightarrow{m}|\cdot|\overrightarrow{OC}|}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore$二面角 $C-A_1B-E$ 的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.