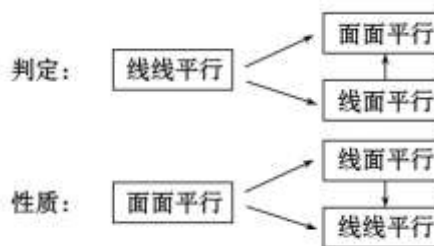
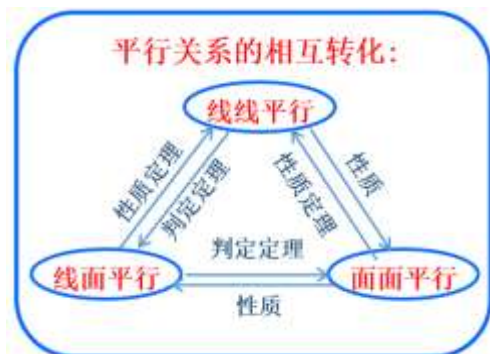


线面平行与垂直

1. 平行:



注:判定是按线线→线面→面面方向证明;性质是按面面→线面→线线方向证明.

线面平行:

2. 异面直线所成的角的求法

(1)作: 利用中位线、长方体、平行四边形等性质平移至一个三角形, 并说明为异面直线所成的角或补角.

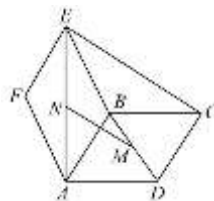
(2)求: 利用余弦定理求角 (如果是特殊三角形), 或利用三角形的性质求角.

3.

典例

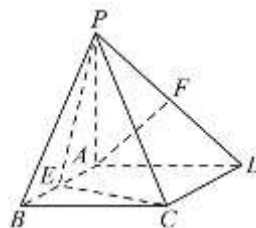
1. 已知正方形 $ABCD$ 与正方形 $ABEF$ 不共面, N, M 分别在 AE 和 BD 上且为中点.

求证: $MN \parallel$ 平面 BCE .

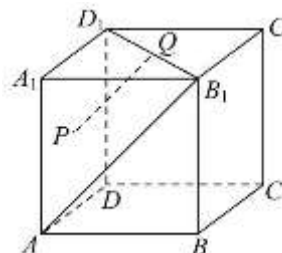


2. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是平行四边形, 点 E, F 分别为棱 AB, PD 的中点.

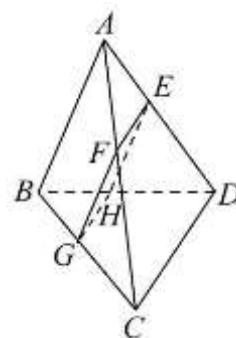
求证: $AF \parallel$ 平面 PCE .



3. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, 点 P 是平面 AA_1D_1D 的中心, 点 Q 是 B_1D_1 上一点, 且 $PQ \parallel$ 平面 AA_1B_1B , 则线段 PQ 长为_____.

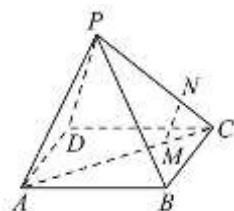


4. 如图,三棱锥 A-BCD 被一平面所截,截面为平行四边形 EFGH,
 (1) 求证:CD//平面 EFGH. (2) 证明:EH//AB.

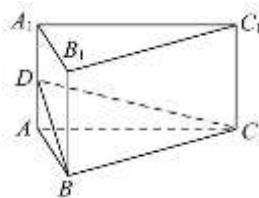


【练习】

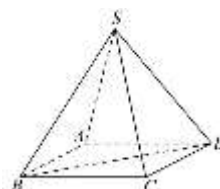
- 1.(2020·南昌高一检测)如图,四棱锥 P-ABCD 中,M,N 分别为 AC,PC 上的点,且 MN//平面 PAD, 则 ()
 A.MN//PD B.MN//PA C.MN//AD D.以上均有可能



1



2

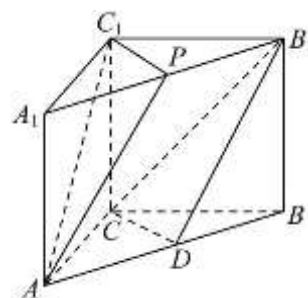


3

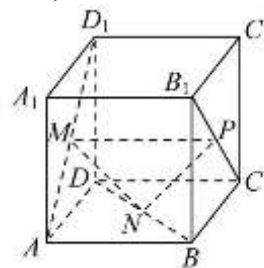
- 2.在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,D 为 AA_1 的中点,点 P 在侧面 BCC_1B_1 上运动,当点 P 满足条件_____时, A_1P //平面 BCD.
- 3.如图,四棱锥 S-ABCD 中,底面 ABCD 为平行四边形,E 是 SA 的上一,当点 E 满足条件_____时, SC //平面 EBD,写出条件并加以证明.

面面平行:

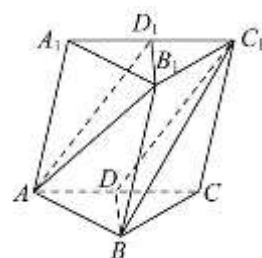
- 1.如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,D,P 分别是棱 AB, A_1B_1 的中点,求证:平面 APC_1 //平面 B_1CD .



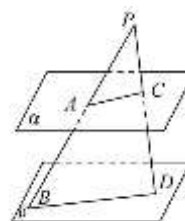
- 2.在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, M,N,P 分别是 AD_1, BD 和 B_1C 的中点,
求证:平面 $MNP \parallel$ 平面 CC_1D_1D .



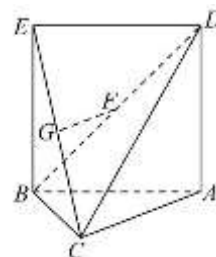
- 3.如图,已知在斜三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中,点 D, D_1 分别为 AC, A_1C_1 上的点.若平面 $BC_1D \parallel$ 平面 AB_1D_1 ,求 $\frac{AD}{DC}$ 的值.



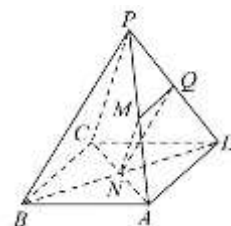
- 4.如图,已知 $\alpha \parallel \beta$, P 是平面 α, β 外的一点,直线 PB, PD 分别与 α, β 相交于 A, B 和 C, D .
(1)求证: $AC \parallel BD$.
(2)已知 $PA=4, AB=5, PC=3$,求 PD 的长.



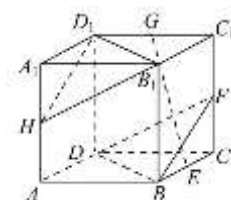
- 5.如图所示,在四棱锥 $C - ABED$ 中,四边形 $ABED$ 是正方形,点 G, F 分别是线段 EC, BD 的中点.线段 AB 上是否存在一点 H ,使得平面 $GFH \parallel$ 平面 ACD .若存在,请找出点 H 并证明;若不存在,请说明理由.



6. (平行综合) 如图,已知四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为平行四边形,点 M,N,Q 分别是 PA,BD,PD 的中点.(1)求证: $MN \parallel$ 平面 PCD .(2)求证:平面 $MNQ \parallel$ 平面 PBC .

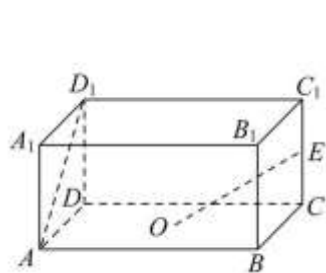


7. 已知如图: E,F,G,H 分别是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 BC,CC_1,C_1D_1,AA_1 的中点.
(1)求证: $EG \parallel$ 平面 BB_1D_1D .(2)求证:平面 $BDF \parallel$ 平面 B_1D_1H .

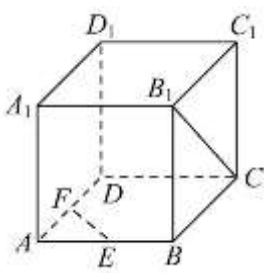


异面直线所成夹角:

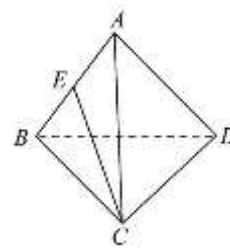
1. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=3,AD=1,AA_1=\sqrt{2}$,点 O 为长方形 $ABCD$ 对角线的交点, E 为棱 CC_1 的中点,则异面直线 AD_1 与 OE 所成的角为_____.



1



2



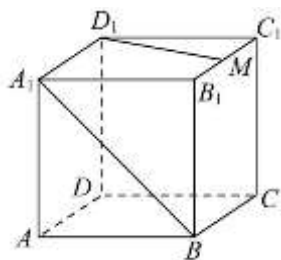
3

2. 如图所示,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E,F 分别是 AB,AD 的中点,则异面直线 B_1C 与 EF 所成的角的大小为 ()

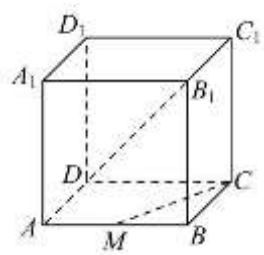
- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

3. 如图,已知四面体 $ABCD$ 的棱长均为 2, E 是 AB 的中点,则异面直线 CE 与 BD 所成角的余弦值为_____.

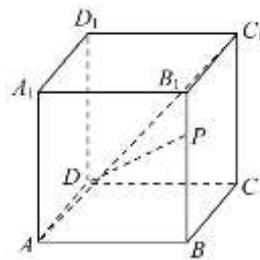
4.(2020·长春高一检测)如图,正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, M 为 B_1C_1 的中点,连接 A_1B, D_1M , 则异面直线 A_1B 和 D_1M 所成角的余弦值为_____.



4



5

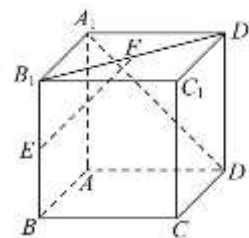


6

5.正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, M 是 AB 的中点, 则 DB_1 与 CM 所成角的余弦值为_____.

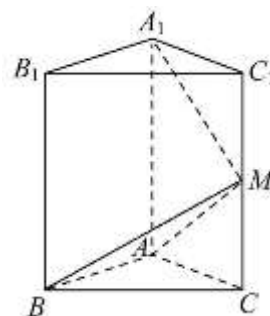
6.正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4, 点 P 是棱 BB_1 上一点, 若异面直线 AC_1 与 PD 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{11}}{33}$, 则 $BP =$ _____.

7.正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, 点 E, F 分别是 BB_1, D_1B_1 的中点, 求证: $EF \perp DA_1$.

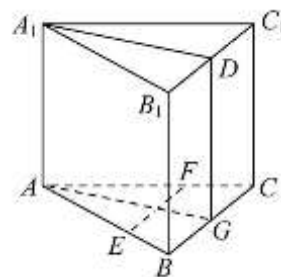


垂直:

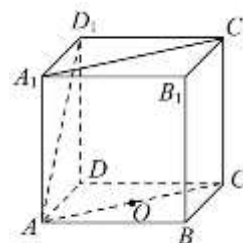
1. 如图, 该几何体的三个侧面 $AA_1B_1B, BB_1C_1C, CC_1A_1A$ 都是矩形. 若 $AA_1 = 2AC, AC \perp AB$, M 为 CC_1 的中点, 证明: $A_1M \perp$ 平面 ABM .



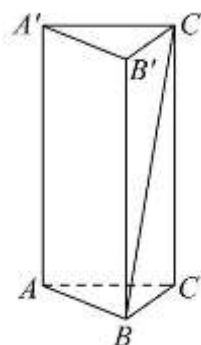
2.如图,在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中,已知点 E 在棱 AB 上,且 $AE=2EB$,点 F 在棱 AC 上,且 $AF=2FC$,点 D 为棱 B_1C_1 的中点,点 G 为棱 BC 的中点.求证: $EF \perp$ 平面 A_1AGD .



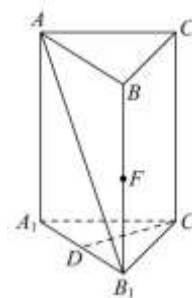
3.如图,在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, O 是 AC 中点.求直线 D_1A 与平面 A_1ACC_1 所成的角的值.



4.在正三棱柱 $ABC - A'B'C'$ 中, $AB=1, AA'=2$,求直线 BC' 与平面 $ABB'A'$ 所成角的正弦值.

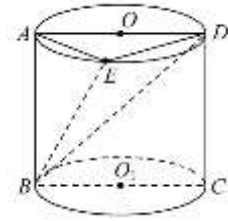


5.如图,在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AC=BC=1, \angle ACB=90^\circ, AA_1=\sqrt{2}$, D 是 A_1B_1 的中点.当点 F 在 BB_1 上的什么位置时,会使得 $AB_1 \perp$ 平面 C_1DF ? 并证明你的结论.



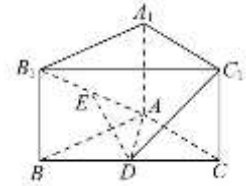
6.如图, $ABCD$ 是圆柱的一个轴截面,点 E 是上底面圆周上的一点,已知 $AB=BC=5, AE=3$.

(1)求证: $DE \perp$ 平面 ABE .(2)求直线 BE 与平面 ADE 所成角的正切值.

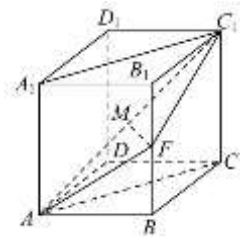


7.如图,正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中,底面边长为 2,点 D, E 分别是 BC, AB_1 的中点.

(1)求证: $DE \parallel$ 平面 ACC_1A_1 ;(2)若 $BB_1=1$,求证: $C_1D \perp$ 平面 ADE .

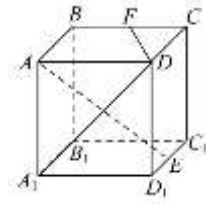


8.已知四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 \perp$ 底面 $ABCD$,且底面 $ABCD$ 为菱形, F 为 BB_1 的中点, M 为线段 AC_1 的中点.求证: $MF \perp$ 平面 A_1ACC_1 .

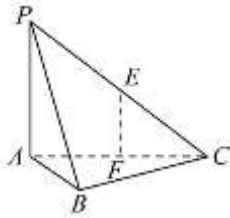


9.如图,正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为棱 C_1D_1 的中点, F 为棱 BC 的中点.

(1)求证:直线 $AE \perp$ 直线 A_1D ; (2)在线段 AA_1 上求一点 G ,使得直线 $AE \perp$ 平面 DFG .

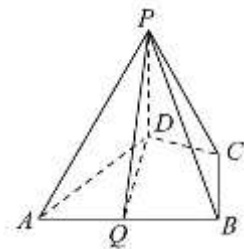


10.如图,在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 底面 ABC , $\angle BAC=90^\circ$, F 是 AC 的中点, E 是 PC 上的点,且 $EF \perp BC$,则 $\frac{PE}{EC} =$ _____.



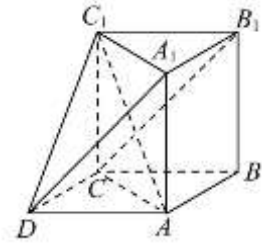
11.如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $CD \perp$ 平面 PAD , $AD=2PD=4$, $AB=6$, $PA=2\sqrt{5}$, $\angle BAD=60^\circ$,点 Q 在棱 AB 上. (1)证明: $PD \perp$ 平面 $ABCD$;

(2)若三棱锥 $P-ADQ$ 的体积为 $2\sqrt{3}$,求点 B 到平面 PDQ 的距离.

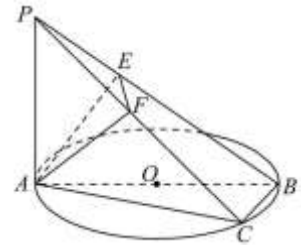


12. 如图所示的几何体中, $ABC - A_1B_1C_1$ 为三棱柱, 且 $AA_1 \perp$ 平面 ABC , $AA_1 = AC$, 四边形 $ABCD$ 为平行四边形, $AD = 2CD$, $\angle ADC = 60^\circ$.

(1) 求证: $AC_1 \perp$ 平面 A_1B_1CD ; (2) 若 $CD = 2$, 求 C_1 到平面 A_1B_1CD 的距离.



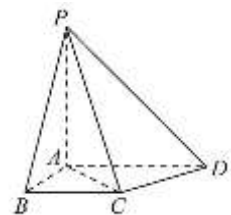
13. 如图, AB 为 $\odot O$ 直径, C 为 $\odot O$ 上一点, $PA \perp$ 平面 ABC , $AE \perp PB$, $AF \perp PC$, 求证: $PB \perp EF$.



14. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = BC = 1$, $PA = AD = 2$.

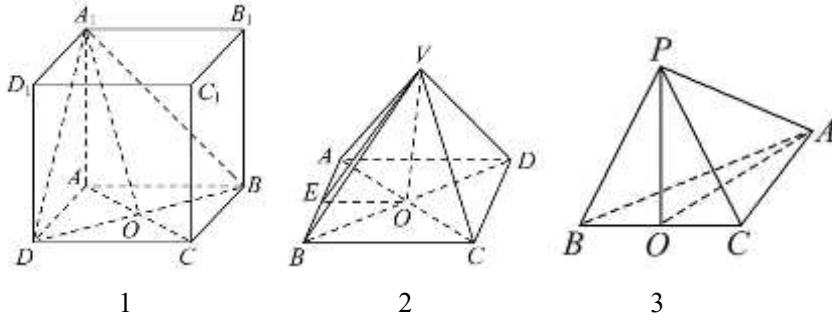
(1) 求证: $CD \perp$ 平面 PAC ;

(2) 在棱 PC 上是否存在点 H , 使得 $AH \perp$ 平面 PCD ? 若存在, 确定点 H 的位置; 若不存在, 说明理由.



二面角:

1.(2020·宁波高一检测)在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中,截面 A_1BD 与底面 $ABCD$ 所成的二面角 $A_1-BD - A$ 的正切值为_____.

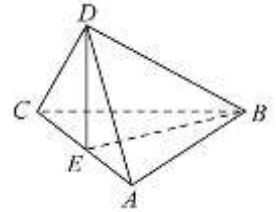


2.在正四棱锥 $V-ABCD$ 中,底面边长为 2,侧棱长为 $\sqrt{2}$,则二面角 $V-AB-C$ 的大小为_____.

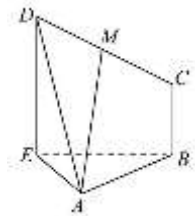
3.若 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面外一点,而 $\triangle PBC$ 和 $\triangle ABC$ 都是边长为 2 的正三角形, $PA = \sqrt{6}$,那么二面角 $P-BC -A$ 的大小为_____.

4.(2020·信阳高一检测)如图,在三棱锥 $D -ABC$ 中,若 $AB=CB,AD=CD,E$ 是 AC 的中点,则下列命题中正确的有_____(写出全部正确命题的序号).

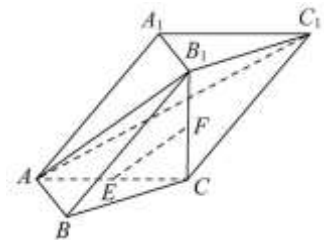
- ①平面 $ABC \perp$ 平面 ABD ;
- ②平面 $ABD \perp$ 平面 BCD ;
- ③平面 $ABC \perp$ 平面 BDE ;
- ④平面 $ACD \perp$ 平面 BDE .



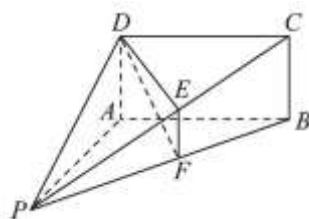
5.如图所示,在四棱锥 $A-BCDE$ 中, $\triangle ABE$ 是正三角形,四边形 $BCDE$ 为直角梯形,点 M 为 CD 中点,且 $BC \parallel DE,BC \perp BE,AB=BC=2,DE=4,AM=2\sqrt{3}$.求证:平面 $ABE \perp$ 平面 $BCDE$.



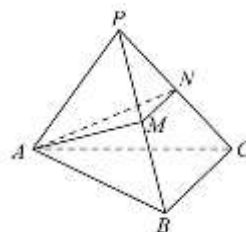
6.在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB \perp AC, B_1C \perp$ 平面 ABC, E, F 分别是 AC, B_1C 的中点.(1)求证: $EF \parallel$ 平面 AB_1C_1 ;(2)求证:平面 $AB_1C \perp$ 平面 ABB_1 .



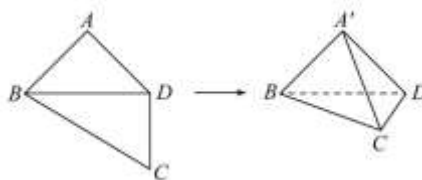
7.如图,在四棱锥 P-ABCD 中,平面 ABCD \perp 平面 PAB,四边形 ABCD 为矩形,PA=AB,E,F 分别为 PC,PB 的中点.证明:平面 DEF \perp 平面 PBC.



8.如图,在三棱锥 P-ABC 中,AP=AB,M,N 分别为棱 PB,PC 的中点,平面 PAB \perp 平面 PBC. 求证:平面 AMN \perp 平面 PBC.



9.如图,四边形 ABCD 中,AB=AD=CD=1,BD= $\sqrt{2}$,BD \perp CD.将四边形 ABCD 沿对角线 BD 折成四面体 A'-BCD,使平面 A'BD \perp 平面 BCD,
(1)求证:A'B \perp A'C.(2)求直线 A'C 与平面 BCD、平面 A'BD 所成的角.



10. 如图所示,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $AB \parallel DC$, $\triangle PAD$ 是等边三角形,已知 $BD=8, AD=4, AB=2DC=4$.

(1) 设 M 是 PC 上的一点,求证:平面 $MBD \perp$ 平面 PAD ;

(2) 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.

