放缩法与构造法（数列与不等式、函数与不等式）

一、裂项放缩

【例 1】（1）求$\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{4k^2-1}$的值；（2）求证：$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<\frac{5}{3}$.

【常用放缩技巧】

（1）$\frac{1}{n^2}=\frac{4}{4n^2}<\frac{4}{4n^2-1}=2(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$；

（2）$\frac{1}{C_{n+1}^1C_n^2}=\frac{2}{(n+1)n(n-1)}=\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{n(n+1)}$；

（3）$T_{r+1}=C_n^r\cdot\frac{1}{n^r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}\cdot\frac{1}{n^r}<\frac{1}{r!}<\frac{1}{r(r-1)}=\frac{1}{r-1}-\frac{1}{r}$（$r\ge2$）；

（4）$(1+\frac{1}{n})^n<1+1+\frac{1}{2\times1}+\frac{1}{3\times2}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}<\frac{5}{2}$；

（5）$\frac{1}{2^n(2^n-1)}=\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^n}$；　　（6）$\frac{1}{\sqrt{n+2}}<\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$；

（7）$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\frac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$；

（8）$(\frac{2}{2n+1}-\frac{1}{2n+3})\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{1}{(2n+1)\cdot2^{n-1}}-\frac{1}{(2n+3)\cdot2^n}$；

（9）$\frac{1}{k(n+1-k)}=(\frac{1}{n+1-k}+\frac{1}{k})\frac{1}{n+1}$，$\frac{1}{n(n+1+k)}=\frac{1}{k+1}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1+k})$；

（10）$\frac{n}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$；

（11）$\frac{1}{\sqrt{n}}<\sqrt{2}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}=\frac{2}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}+\sqrt{n-\frac{1}{2}}}$；

（12）$\frac{2^n}{(2^n-1)^2}=\frac{2^n}{(2^n-1)(2^n-1)}<\frac{2^n}{(2^n-1)(2^n-2)}=\frac{2^{n-1}}{(2^n-1)(2^{n-1}-1)}=\frac{1}{2^{n-1}-1}-\frac{1}{2^n-1}$（$n\ge2$）；

（13）$\frac{1}{\sqrt{n^3}}=\frac{1}{\sqrt{n\cdot n^2}}<\frac{1}{\sqrt{n(n-1)(n+1)}}=[\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}-\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}]\cdot\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}$

$=(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}})\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{2\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$；

（14）$2^{n+1}=2\cdot 2^n=(3-1)\cdot 2^n>3\Rightarrow 3(2^n-1)>2^n\Rightarrow 2^n-1>\dfrac{2^n}{3}\Rightarrow \dfrac{1}{2^n-1}<\dfrac{2^n}{3}$；

（15）$\dfrac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}=\dfrac{1}{(k+1)\,!}-\dfrac{1}{(k+2)\,!}$；

（16）$\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}<\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$（$n\geq 2$）；

（17）$\dfrac{\sqrt{m^2+1}-\sqrt{n^2+1}}{m-n}=\dfrac{m^2-n^2}{(m-n)(\sqrt{m^2+1}+\sqrt{n^2+1})}=\dfrac{m+n}{\sqrt{m^2+1}+\sqrt{n^2+1}}<1$.

【例 2】（1）求证：$1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)^2}>\dfrac{7}{6}-\dfrac{1}{2(2n-1)}$（$n\geq 2$）；

（2）求证：$\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{36}+\cdots+\dfrac{1}{4n^2}<\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4n}$；

（3）求证：$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n}<\sqrt{2n+1}-1$；

（4）求证：$2(\sqrt{n+1}-1)<1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}<\sqrt{2}(\sqrt{2n+1}-1)$.

【例 4】(2008 年全国卷)设函数 $f(x)=x-x\ln x$，数列 $\{a_n\}$ 满足 $0<a_1<1$，$a_{n+1}=f(a_n)$．设 $b\in(a_1,1)$，整数 $k\geq\dfrac{a_1-b}{a_1\ln b}$．证明：$a_{k+1}>b$．

二、函数放缩

【例 8】求证：$\dfrac{\ln 2}{2}+\dfrac{\ln 3}{3}+\dfrac{\ln 4}{4}+\cdots+\dfrac{\ln 3^n}{3^n}<3^n-\dfrac{5n+6}{6}$（$n\in N^*$）.

【例 13】证明：$\dfrac{\ln 2}{3}+\dfrac{\ln 3}{4}+\dfrac{\ln 4}{5}+\cdots+\dfrac{\ln n}{n+1}<\dfrac{n(n-1)}{4}$（$n\in N^*$，$n>1$）.

【例 15】（2008 年厦门市质检）已知函数 $f(x)$ 是在 $(0,+\infty)$ 上处处可导的函数，若 $xf'(x)>f(x)$ 在 $x>0$ 上恒成立.

（1）求证：函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数；

（2）当 $x_1>0$，$x_2>0$ 时，证明：$f(x_1)+f(x_2)<f(x_1+x_2)$；

（3）已知不等式 $\ln(1+x)<x$ 在 $x>-1$ 且 $x\neq 0$ 时恒成立，求证：

$$\frac{1}{2^2}\ln 2^2+\frac{1}{3^2}\ln 3^2+\frac{1}{4^2}\ln 4^2+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}\ln(n+1)^2>\frac{n}{2(n+1)(n+2)}\quad(n\in N^*).$$

【例 16】（2008 年福州市质检）已知函数 $f(x)=x\ln x$．若 $a>0$，$b>0$，证明：

$f(a)+(a+b)\ln 2\geq f(a+b)-f(b)$.

三、分式放缩

姐妹不等式：$\dfrac{b}{a}>\dfrac{b+m}{a+m}$（$b>a>0$，$m>0$）和 $\dfrac{b}{a}<\dfrac{b+m}{a+m}$（$a>b>0$，$m>0$）；记忆口诀“小者小，大者大”；解释：看 b 的大小，若 b 小，则不等号是小于号，反之.

【例 19】姐妹不等式：$(1+1)(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})\cdots(1+\frac{1}{2n-1})>\sqrt{2n+1}$ 和

$(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{6})\cdots(1+\frac{1}{2n})<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$，也可以表示成为：$\dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}>\sqrt{2n+1}$ 和

$\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

四、分类放缩

【例 23】（2007 年泉州市高三质检）已知函数 $f(x)=x^2+bx+c(b\ge 1,c\in R)$，若 $f(x)$ 的定义域为[－1，0]，值域也为[－1，0]．若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\frac{f(n)}{n^3}(n\in N^*)$，记数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，问是否存在正常数 A，使得对于任意正整数 n 都有 $T_n<A$？并证明你的结论．

构造法证明不等式（一）

一、移项法构造函数

【例 1】已知函数 $f(x)=\ln(x+1)-x$，求证：当 $x>-1$ 时，恒有 $1-\frac{1}{x+1}\le \ln(x+1)\le x$.

2、作差法构造函数证明

【例 2】已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\ln x$，求证：在区间 $(1,+\infty)$ 上，函数 $f(x)$ 的图象在函数 $g(x)=\frac{2}{3}x^3$ 的图象的下方．

3、换元法构造函数证明

【例 3】（2007 年山东卷）证明：对任意的正整数 n，不等式 $\ln(\frac{1}{n}+1)>\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}$ 都成立．

4、从条件特征入手构造函数证明

【例 4】若函数 $y=f(x)$ 在 R 上可导，且满足不等式 $xf'(x)>-f(x)$ 恒成立，常数 a 、b 满足 $a>b$，求证：$af(a)>bf(b)$.

5、主元法构造函数

【例 5】已知函数 $f(x)=\ln(1+x)-x$， $g(x)=x\ln x$.

（1）求函数 $f(x)$ 的最大值；

（2）设 $0<a<b$，证明：$0<g(a)+g(b)-2g(\frac{a+b}{2})<(b-a)\ln 2$.

6、构造二阶导函数证明函数的单调性（二次求导）

【例 6】已知函数 $f(x)=ae^{x}-\frac{1}{2}x^{2}$.

（1）若 $f(x)$ 在 R 上为增函数，求 a 的取值范围；

（2）若 $a=1$，求证：当 $x>0$ 时， $f(x)>1+x$.

7、对数法构造函数（选用于幂指数函数不等式）

【例 7】证明：当$x>0$时，$(1+x)^{1+\frac{1}{x}}<e^{1+\frac{x}{2}}$.

8、构造形似函数

【例 8】证明：当$b>a>e$，证明$a^b>b^a$.

【例 9】已知m、n都是正整数，且$1<m<n$，证明：$(1+m)^n>(1+n)^m$.

【思维挑战】

1、（2007 年，安徽卷）设$a\geq 0$，$f(x)=x-1-\ln^2 x+2a\ln x$.

求证：当$x>1$时，恒有$x>\ln^2 x-2a\ln x+1$.

2、（2007 年，安徽卷）已知定义在正实数集上的函数$f(x)=\frac{1}{2}x^2+2ax$，$g(x)=3a^2\ln x+b$，其中$a>0$，且$b=\frac{5}{2}a^2-3a^2\ln a$，求证：$f(x)\geq g(x)$.

3、已知函数$f(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}$，求证：对任意的正数$a$、$b$，恒有$\ln a-\ln b\geq 1-\frac{b}{a}$.

4、（2007 年，陕西卷）$f(x)$是定义在$(0,+\infty)$上的非负可导函数，且满足$xf'(x)-f(x)\leq 0$，对任意正数a、b，若$a<b$，则必有（　　）

A．$af(b)\leq bf(a)$　　B．$bf(a)\leq af(b)$　　C．$af(a)\leq f(b)$　　D．$bf(b)\leq f(a)$