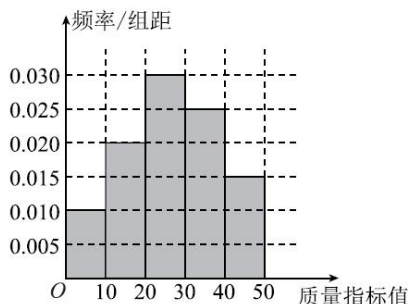


## 概率统计综合问题

1. 2020年初，新型冠状病毒肺炎爆发时，我国政府迅速采取强有力措施抗击疫情，赢得了国际社会的高度评价，在这期间，为保证抗疫物资的质量，我国也加大了质量检查的力度. 某市2020年初新增加了甲、乙两家专门生产消毒液的工厂，质检部门现从这两家工厂中各随机抽取了100瓶消毒液，检测其质量，得到甲厂所生产的消毒液的质量指标值的频率分布直方图如图所示，乙厂所生产的消毒液质量指标值的频数分布表如表所示（同一组数据用该组数据的区间中点值作代表，视频率为概率）



质量指标值	[0,10)	[10,20)	[20,30)	[30,40)	[40,50)
频数	20	10	30	15	25

(1) 规定：消毒液的质量指标值越高，消毒液的质量越好. 已求得甲厂所生产的消毒液的质量指标值的中位数为  $26\frac{2}{3}$ ，乙厂所生产的消毒液的质量指标值的平均数为 26.5，分别求甲厂所生产的消毒液的质量指标值的平均数以及乙厂所生产的消毒液的质量指标值的中位数，并针对这两家工厂所生产的消毒液的质量情况写出两条统计结论；

(2) 甲厂生产的消毒液的质量指标值  $Z$  近似地服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ ，其中  $\mu$  近似为样本平均数  $\bar{x}$ ，并已求得  $\sigma = 11.95$ . 该厂决定将消毒液分为  $A$ ， $B$ ， $C$  级三个等级，其中质量指标值  $Z$  不高于 26.6 的为  $C$  级，高于 38.45 的为  $A$  级，其余为  $B$  级，请利用该正态分布模型解决下列问题：

等级	A	B	C
出厂价 $X$	30	25	16

(i) 甲厂近期生产了 10 万瓶消毒液，试估计其中  $B$  级消毒液的总瓶数；

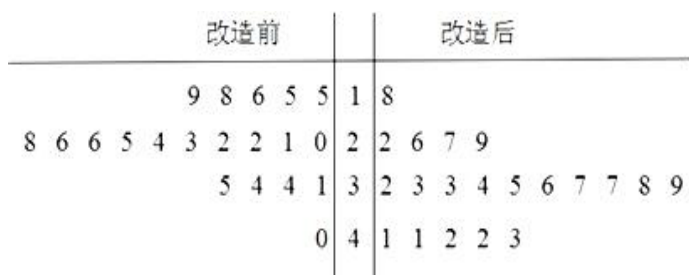
(ii) 已知每瓶消毒液的等级与出厂价  $X$ （单位：元/瓶）的关系如下表所示：

假定甲厂半年消毒液的生产量为 1000 万瓶，且消毒液全都能销售出去. 若每瓶消毒液的成本为 20 元，工厂的总投资为 4 千万元（含引进生产线、兴建厂房等一切费用在内），问：甲厂能否在半年之内收回投资？试说明理由.

附：若  $Z : N(\mu, \sigma^2)$ ，则  $P(\mu - \sigma < Z \leq \mu + \sigma) = 0.6827$ ， $P(\mu - 2\sigma < Z \leq \mu + 2\sigma) = 0.9545$ ，

$P(\mu - 3\sigma < Z \leq \mu + 3\sigma) = 0.9973$ .

2. 为了提高生产线的运行效率，工厂对生产线的设备进行了技术改造.为了对比技术改造后的效果，采集了生产线的技术改造前后各 20 次连续正常运行的时间长度（单位：天）数据，并绘制了如茎叶图：



	超过 $m$	不超过 $m$
改造前	$a$	$b$
改造后	$c$	$d$

(1) ①设所采集的 40 个连续正常运行时间的中位数  $m$ ，

并将连续正常运行时间超过  $m$  和不超过  $m$  的次数填入下面的列联表：

②根据①中的列联表，能否有 99% 的把握认为生产线技术改造前后的连续正常运行时间有差异？

附：
$$K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
$k$	3.841	6.635	10.828

(2) 工厂的生产线的运行需要进行维护，工厂对生产线的生产维护费用包括正常维护费、保障维护费两种.对生产线设定维护周期为  $T$  天（即从开工运行到第  $kT$  天（ $k \in N^*$ ）进行维护.生产线在一个生产周期内设置几个维护周期，每个维护周期相互独立.在一个维护周期内，若生产线能连续运行，则不会产生保障维护费；若生产线不能连续运行，则产生保障维护费.经测算，正常维护费为 0.5 万元/次；保障维护费第一次为 0.2 万元/周期，此后每增加一次则保障维护费增加 0.2 万元.现制定生产线一个生产周期（以 120 天计）内的维护方案： $T = 30$ ， $k = 1, 2, 3, 4$ .以生产线在技术改造后一个维护周期内能连续正常运行的频率作为概率，求一个生产周期内生产维护费的分布列及期望值.