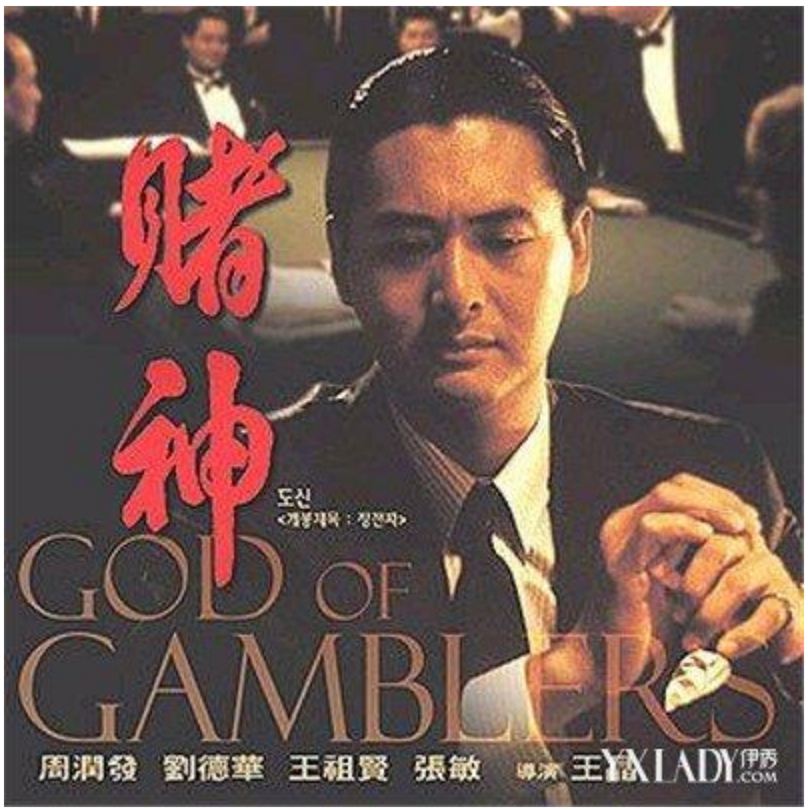
2018

3.2.1

古典概型

2018.9.21

[情境导学] 香港著名电影演员周润发在影片《赌神》中演技高超，他扮演的赌神在一次聚赌中，曾连续十次抛掷骰子都出现6点，那么如果是你随机地来抛掷骰子，连续3次、4次、…、10次都是6点的概率有多大？本节我们就来探究这个问题.



3.2.1 古典概型

什么样的概率概型是古典概型？

古典概型的概率又如何求解？

情境引入

考察两个试验，并分析事件的构成：

1.抛掷一枚质地均匀的硬币的试验；

2.掷一颗质地均匀的骰子的试验.

思考：

（1）可能的结果分别有哪些？

（2）这些结果具有哪些特点？

（3）把每个试验结果看成一个事件，他们都是**随机事件**吗？

（4）第二个实验中“出现偶数点”可以用这些结果表示吗？

（5）这些随机试验结果出现的可能性相等吗？

抛掷一枚质地均匀的硬币，有两种可能结果：“正面向上”、“反面向上”，它们都是随机事件，且这两个结果的出现是等可能的；

抛掷一枚质地均匀的骰子，会有6种可能结果：出现“1 点”、“2 点”、“3 点”、“4 点”、“5 点”、“6 点”，

这6 个结果不可能同时发生，即它们是互斥事件，而且这6个结果的出现是等可能的；事件“出现偶数点”可以用“出现2点”“出现4点”“出现6点”的和事件来表示。

基本事件

基本事件： 在一次试验中可能出现的每一个基本结果称为基本事件。

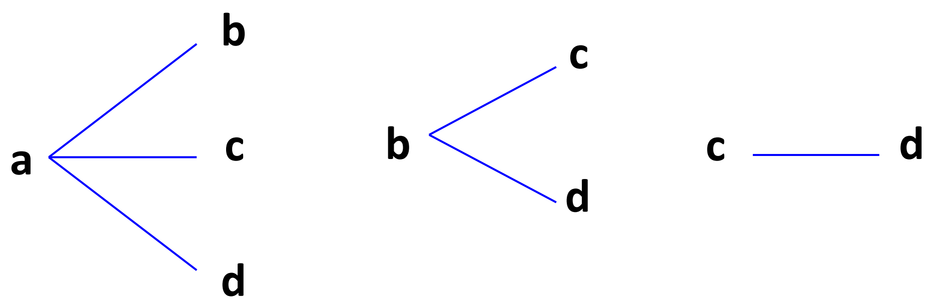
基本事件（可能性相等）**的特点：**

(1)任何两个基本事件是互斥的

(2)任何事件(除不可能事件)都可以表示成基本事件的和。

例1：从字母a，b，c，d中任意取出两个不同字母的试验中，有哪些基本事件？

分析：为了解基本事件，我们可以按照字典排序的顺序，把所有可能的结果都列出来。



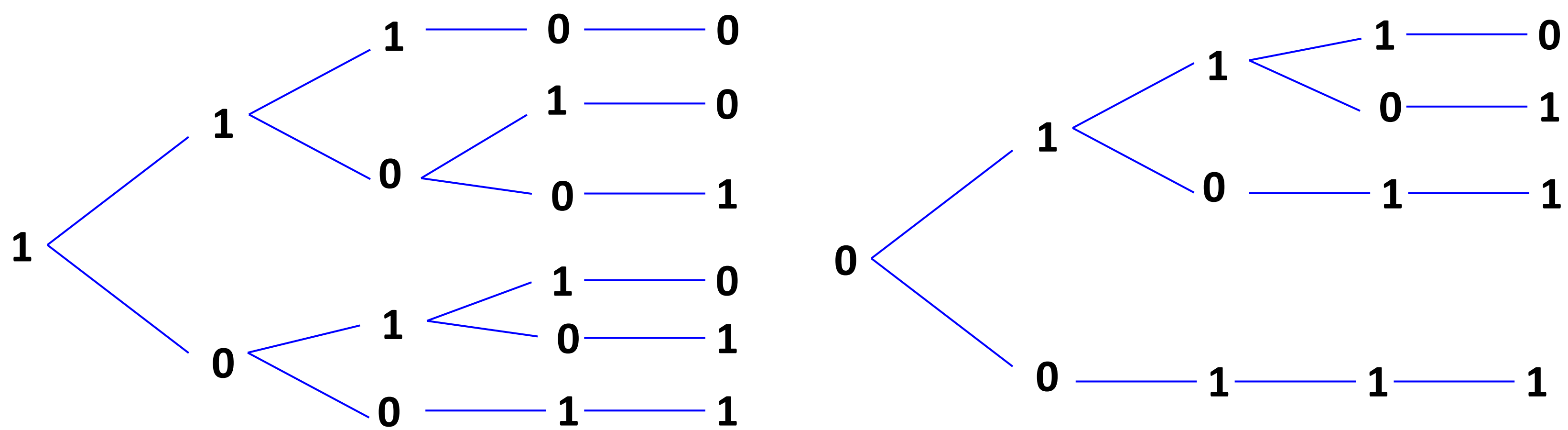
树状图

解：所求的基本事件共有6个：

$$A=\{a,b\}\quad B=\{a,c\}\quad C=\{a,d\}$$

$$D=\{b,c\}\quad E=\{b,d\}\quad F=\{c,d\}$$

例2：某人射击5 枪，命中了3 枪，试写出所有的基本事件(1表示命中，0 表示未命中)



解：所求的基本事件共有10个：

11100，11010，11001，10110，10101，

10011，01110，01101，01011，00111

观察对比

上述两个试验和例1、2的共同特点：

1、有限性：

试验中所有可能出现的基本事件只有有限个

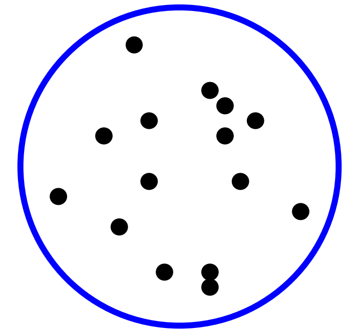
2、等可能性：

每个基本事件出现的可能性相等

我们将具有这两个特点的概率模型称为古典概率模型，简称古典概型.

试一试

（1）向一个圆面内随机地投射一个点，如果该点落在圆内任意一点都是等可能的，你认为这是古典概型吗? 为什么？



有限性　　　　等可能性

（2）如图，某同学随机地向一靶心进行射击，这一试验的结果只有有限个：命中10环、命中9环……命中5环和不中环。你认为这是古典概型吗？为什么？

有限性　　等可能性

小结

判断一个试验是否为古典概型，在于检验这个试验是否同时具有**有限性**和**等可能性**，**缺一不可.**

请同学们结合投硬币和掷骰子的试验，试求下列事件的概率：

（1）抛掷一枚质地均匀的硬币，正面朝上的概率；

（2）掷一颗质地均匀的骰子，出现偶数点的概率；

请同学们概况总结出古典概型的概率计算公式。

（3）例1中从字母a，b，c，d中任意取出两个不同字母的试验中，出现字母“d”的概率是多少?

（4）例2中 某人射击5 枪，命中了3 枪，恰好有2枪连中的概率是多少?

例1：从字母a，b，c，d中任意取出两个不同字母的试验中，出现字母“d”的概率是多少？

解：所有的基本事件共有6个：

$$A=\{a,b\}\quad B=\{a,c\}\quad C=\{a,d\}$$

$$D=\{b,c\}\quad E=\{b,d\}\quad F=\{c,d\}$$

出现字母“d”的基本事件有3个：

$$C=\{a,d\}\quad E=\{b,d\}\quad F=\{c,d\}$$

$$\therefore P(\text{“出现字母d”})=\frac{\text{“出现字母d”所包含的基本事件的个数}}{\text{基本事件的总数}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

例2：某人射击5 枪，命中了3 枪，恰好有2枪连中的概率是多少？(1表示命中，0 表示未命中)

解：所有的基本事件共有10个：

11100，11010，11001，10110，10101，

10011，01110，01101，01011，00111.

其中恰好有2枪连中的基本事件有6个：

11010，11001，10110，10011，01101，01011

$$\therefore P\text{（恰好有2枪连中）}=\frac{\text{“恰好有2枪连中”所包含的基本事件的个数}}{\text{基本事件的总数}}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

古典概型的概率公式

$$P(A)=\frac{A\text{包含的基本事件的个数}m}{\text{基本事件的总数}n}$$

求古典概型概率的步骤:

(1) 先判断试验是否为古典概型;

(2) 写出所有的基本事件, 求n

(3) 写出事件A所含的基本事件 , 求m

(4) 代入公式$P(A)=\frac{m}{n}$, 求概率

例3 单选题是标准化考试中常用的题型，一般是从A、B、C、D四个选项中选择一个正确答案。如果考生掌握了考察的内容，它可以选择唯一正确的答案。假设考生不会做，他随机的选择一个答案，问他答对的概率是多少？

解：这是一个古典概型，因为试验的可能结果只有4个，考生随机的选择一个答案是选择A、B、C、D的可能性是相等的，

即所有的基本事件只有4个：A、B、C、D，

其中答对的基本事件只有1个.

$$\therefore P(\text{答对})=\frac{\text{“答对”所包含的基本事件的个数}}{\text{基本事件的总数}}=\frac{1}{4}$$

讨论

变式：若是多选题的话，则随机地选择一个答案，答对的概率是多少？

解：①若只有一个选项是正确的，则有4种；

②若有两个选项是正确的，则正确答案可以是

（A,B）（A,C）（A,D）（B,C）(B,D) (C,D)共 6种；

③若有三个选项是正确的，则正确答案可以是

（A,B,C）（A,B,D）（A,C,D）（B,C,D）共4种；

④若四个选项都正确，则正确答案只有1种。

∴正确答案的所有可能结果有4＋6＋4＋1＝15种，

而答对的只有1种可能，

∴ P（答对）$=\frac{1}{15}$.

拓展提升

练习1：同时掷两个骰子，计算：

(1)一共有多少种不同的结果？
(2)其中向上的点数之和是5的结果有多少种？
(3)向上的点数之和是5的概率是多少？
(4)向上的点数之和是几的概率最大？此时概率是多少？

解：（1）掷一个骰子的结果有6种，我们把两个骰子标上记号1，2以便区分，由于1号骰子的结果都可以与2号骰子的任意一个结果配对，我们用一个“有序实数对”来表示组成同时掷两个骰子的一个结果（如表），其中第一个数表示1号骰子的结果，第二个数表示2号骰子的结果。

列表法

1号骰子 \ 2号骰子	1	2	3	4	5	6
1	（1，1）	（1，2）	（1，3）	（1，4）	（1，5）	（1，6）
2	（2，1）	（2，2）	（2，3）	（2，4）	（2，5）	（2，6）
3	（3，1）	（3，2）	（3，3）	（3，4）	（3，5）	（3，6）
4	（4，1）	（4，2）	（4，3）	（4，4）	（4，5）	（4，6）
5	（5，1）	（5，2）	（5，3）	（5，4）	（5，5）	（5，6）
6	（6，1）	（6，2）	（6，3）	（6，4）	（6，5）	（6，6）

（1）从表中可以看出同时掷两个骰子的结果共有36种。

（2）在上面的结果中，向上的点数之和为5的结果有4种，分别为：（1，4），（2，3），（3，2），（4，1）。

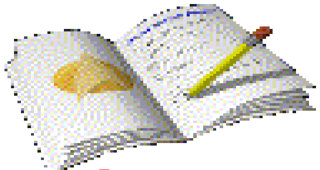
（3）由于所有36种结果是等可能的，其中向上点数之和为5的结果（记为事件A）有4种，则 $P(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

（4）由于所有36种结果是等可能的，其中向上点数之和为7的结果（记为事件A）有6种，则 $P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

思考与探究

为什么要把两个骰子标上记号？如果不标记号会出现什么情况？你能解释其中的原因吗？

如果不标上记号，类似于（3，6）和（6，3）的结果将没有区别。



思考与探究

为什么要把两个骰子标上记号？如果不标记号会出现什么情况？你能解释其中的原因吗？

如果不标上记号，类似于（3,6）和（6,3）的结果将没有区别。

1号骰子 \ 2号骰子	1	2	3	4	5	6
1	（1，1）					
2	（2，1）	（2，2）				
3	（3，1）	(3,2)	（3，3）			
4	(4,1)	（4，2）	（4，3）	（4，4）		
5	（5，1）	（5，2）	（5，3）	（5，4）	（5，5）	
6	（6，1）	（6，2）	（6，3）	（6，4）	（6，5）	（6，6）

$$P(A)=\frac{\text{A所包含的基本事件的个数}}{\text{基本事件的总数}}=\frac{2}{21}$$ ×

拓展提升

练习2： 有同学认为，同时抛掷两枚质地均匀的硬币一次看成一次试验，出现的结果有三种情况: 全是正面，一正一反，全是反面。所以一次试验中的基本事件有三个，并且概率都是$\frac{1}{3}$。你认为他说的对吗?

小结与思考

1、古典概型的两个基本特征是什么？

试验结果具有**有限性**和**等可能性**

2、古典概型下的概率如何计算？

任何事件的概率为：$P(A)=\dfrac{\text{A包含的基本事件的个数}}{\text{基本事件的总数}}$

3、从特殊到一般的数学思想

知识应用

练习 3：如果是你随机地来抛掷骰子，连续 3 次、4 次都是 6 点的概率有多大?

感谢指导

作用布置

1、必做：课时练

2、选作：（思考题）

从含有两件正品A,B 和一件次品 C 的3件产品中

（1）任取两件；

（2）每次取1件，取后不放回，连续取两次；

（3）每次取1件，取后放回，连续取两次，

分别求取出的两件产品中恰有一件次品的概率。

自我评价练习

1、从一个不透明的口袋中摸出红球的概率为 $\frac{1}{5}$，已知袋中红球有3个，则袋中共有除颜色外完全相同的球的个数为（ D ）

A. 5　　B. 8　　C. 10　　D. 15

2、先后抛3枚均匀的硬币,至少出现一次正面的概率为(C)

A. $\frac{1}{8}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{7}{8}$　　D. $\frac{2}{3}$

3、一个口袋里装有2个白球和2个黑球,这4 个球除颜色外完全相同,从中摸出2个球,则1个是白球,1个是黑球的概率是 (A)

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{1}{16}$

感受高考

（2009天津卷文）为了了解某工厂开展群众体育活动的情况，拟采用分层抽样的方法从A，B，C三个区中抽取7个工厂进行调查，已知A，B，C区中分别有18，27，18个工厂

（1）求从A,B,C区中分别抽取的工厂个数

（2）若从抽取的7个工厂中随机抽取2个进行调查结果的对比，用列举法计算这2个工厂中至少有1个来自A区的概率

（1）解：∵18：27：18=2：3：2 共抽取7人

∴从A,B,C三个区中应分别抽取的工厂个数为2，3，2.

（Ⅱ）若从抽取的7个工厂中随机抽取2个进行调查结果的对比，用列举法计算这2个工厂中至少有1个来自A区的概率。

解：设在A区中抽得的2个工厂为 A_1, A_2 在B区中抽得的3个工厂为 B_1, B_2, B_3 在C区中抽得的2个工厂为 C_1, C_2 在这7个工厂中随机抽取2个，全部的可能结果有：

$(A_1,A_2),(A_1,B_1),(A_1,B_2),(A_1,B_3),(A_1,C_1),(A_1,C_2)$

$(A_2,B_1),(A_2,B_2),(A_2,B_3),(A_2,C_1),(A_2,C_2)$

$(B_1,B_2),(B_1,B_3),(B_1,C_1),(B_1,C_2)$

$(B_2,B_3),(B_2,C_1),(B_2,C_2)$

$(B_3,C_1),(B_3,C_2)$

(C_1,C_2) 共21种

随机的抽取的2个工厂至少有一个来自A区的结果有

$(A_1,A_2),(A_1,B_1),(A_1,B_2),(A_1,B_3),(A_1,C_1),(A_1,C_2),(A_2,B_1),$

$(A_2,B_2),(A_2,B_3),(A_2,C_1),(A_2,C_2)$ 共11种

所以所求概率为 $\dfrac{11}{21}$

知识应用

练习3、假设储蓄卡的密码由4个数字组合，每个数字可以是0，1，2，……，9十个数字中的任意一个。假设一个人完全忘记了自己的储蓄卡密码，问他到自动取款机上随机试一次密码就能取到钱的概率是多少？

解：P（“试一次密码就能取到钱”）$=\dfrac{1}{10000}$