适用"差比数列前n项和公式" 探究点三 错位相减法：乘公比，作差消项

功能：求和

【典例 1】已知等比数列$\{a_n\}$满足：$a_1=\frac{1}{2}$，a_1，a_2，$a_3-\frac{1}{8}$ 成等差数列，公比$q\in(0,1)$，

$\Rightarrow 2a_2=a_1+(a_3-\frac{1}{8}) \Rightarrow 2\cdot a_1q=a_1+(a_1q^2-\frac{1}{8}) \Rightarrow 4q^2-8q+3=0$

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；(2)设$b_n=na_n$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和S_n.

$\Rightarrow (2q-1)(2q-3)=0$

$\therefore q=\frac{1}{2}$ 或 $q=\frac{3}{2}$(舍)

$\therefore a_n=a_1q^{n-1}=(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^{n-1}=(\frac{1}{2})^n$，即 $a_n=(\frac{1}{2})^n$

<2> $\because b_n=na_n=n(\frac{1}{2})^n$ $\therefore S_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n$

即 $S_n=1\cdot\frac{1}{2}+\boxed{2\times(\frac{1}{2})^2+3\times(\frac{1}{2})^3+\cdots+n\cdot(\frac{1}{2})^n}\cdots①$ $\left(\frac{1}{2},(\frac{1}{2})^2,(\frac{1}{2})^3,\cdots(\frac{1}{2})^n\right)$ $\Downarrow$ $q=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}\times①$ 得 $\frac{1}{2}S_n=\quad\boxed{1\times(\frac{1}{2})^2+2\times(\frac{1}{2})^3+\cdots+(n-1)(\frac{1}{2})^n}+n\cdot(\frac{1}{2})^{n+1}\cdots②$

由①-②得 $\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^3+\cdots+(\frac{1}{2})^n-n\cdot(\frac{1}{2})^{n+1}=\frac{\frac{1}{2}\times[1-(\frac{1}{2})^n]}{1-\frac{1}{2}}-n\cdot(\frac{1}{2})^{n+1}$

$a_1=\frac{1}{2}$，$q=\frac{1}{2}$ 项数为n

$S_n=2[1-(\frac{1}{2})^n]-2n\cdot(\frac{1}{2})^{n+1}$

【变式1】已知等比数列$\{a_n\}$满足：$a_1=\frac{1}{2}$，a_1，a_2，$a_3-\frac{1}{8}$ 成等差数列，公比 $q\in(0,1)$，

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；(2)设 $c_n=\frac{n}{a_n}$，求数列$\{c_n\}$的前 n 项和S'_n.

$\Rightarrow a_n=\frac{1}{2^n}$

【解析】由题意知 $c_n=n\cdot2^n$ 等差通项、等比通项 > 相乘 $\xrightarrow{求和}$ 错位相减法 ①乘公比 ②作差消项

所以 $S'_n=1\times2^1+\boxed{2\times2^2+3\times2^3+\ldots+(n-2)\times2^{n-2}+(n-1)\times2^{n-1}}+n\cdot2^n$，

$2S'_n=\quad\boxed{1\times2^2+2\times2^3+3\times2^4+\quad\ldots\quad+(n-2)\times2^{n-1}}+(n-1)\times2^n+n\cdot2^{n+1}$，

两式相减得：$-S'_n=1\times2^1+\boxed{2^2+2^3+2^4+\ldots+2^{n-1}+2^n}-n\cdot2^{n+1}=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-n\cdot2^{n+1}=(1-n)\cdot2^{n+1}-2$，

等比：首项为2，公比为2，项数为n

所以 $S'_n=(n-1)\cdot2^{n+1}+2$.

【变式2】已知等比数列$\{a_n\}$满足：$a_1=\frac{1}{2}$，a_1，a_2，$a_3-\frac{1}{8}$ 成等差数列，公比 $q\in(0,1)$，

$a_n=\frac{1}{2^n}$

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；(2)设 $d_n=(2n-1)a_n$，求数列$\{d_n\}$的前 n 项和T_n.

等差通项 等比通项

【解析】由题意可得 $T_n=1\times\frac{1}{2}+\boxed{3\times\frac{1}{2^2}+\quad\ldots\quad+(2n-1)\times\frac{1}{2^n}}$，

①乘公比 $\Rightarrow$ $\frac{1}{2}T_n=\quad\boxed{1\times\frac{1}{2^2}+3\times\frac{1}{2^3}+\ldots+(2n-3)\times\frac{1}{2^n}}+(2n-1)\times\frac{1}{2^{n+1}}$，

两式相减得$\frac{1}{2}T_n=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2^2}+\ldots+2\times\frac{1}{2^n}-(2n-1)\times\frac{1}{2^{n+1}}$

②作差消项

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-(2n-1)\times\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$，

所以 $T_n=3-\frac{4}{2^n}-\frac{2n-1}{2^n}=3-\frac{2n+3}{2^n}$.

【类题通法】错位相减法的适用题目及注意事项

(1)适用范围：它主要适用于$\{a_n\}$是等差数列，$\{b_n\}$是等比数列，求数列$\{a_nb_n\}$的前 n 项和.

(2)注意事项：①利用"错位相减法"，在写出 S_n 与 qS_n 的表达式时，应注意使两式错位对齐，以便于作差，正确写出$(1-q)S_n$ 的表达式．②利用此法时要注意讨论公比 q 是否等于 1 的情况.

探究点四　分组求和问题

【典例 2】已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=2^{n+1}-2$.　消Q：S_n, n, a_n, 关|同　$\boxed{a_n=\begin{cases}S_1, & n=1\\ S_n-S_{n-1}, & n\geq 2\end{cases}}$

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；(2)若数列$\{b_n\}$满足 $b_n=S_n+\log_2\frac{1}{a_n}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

【解析】(1)数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=2^{n+1}-2$.①

$a_1=S_1=2^{1+1}-2=2$

当 n＝1 时，$a_1=2$；当 n≥2 时，$S_{n-1}=2^n-2$.②，

①－②得 $a_n=S_n-S_{n-1}=2^n$，经验证 $a_1=2$ 符合通项公式，故 $a_n=2^n$.

(2)由于 $a_n=2^n$，$S_n=2^{n+1}-2$.数列$\{b_n\}$满足 $b_n=S_n+\log_2\frac{1}{a_n}=2^{n+1}-2-n$.

所以 $T_n=(2^2-2-1)+(2^3-2-2)+\dots+(2^{n+1}-2-n)=(2^2+2^3+2^4+\dots+2^{n+1})-2n-(1+2+3+\dots+n)$

$=\frac{4(2^n-1)}{2-1}-2n-\frac{n(n+1)}{2}=2^{n+2}-\frac{1}{2}n^2-4-\frac{5}{2}n$.

【类题通法】非等差、等比数列求和问题的求解方法

(1)若数列$\{a_n\}$既不是等差数列又不是等比数列，在求数列$\{a_n\}$的前 n 项和时，可通过转化的思想，将数列的求和问题转化为等差或等比数列求和问题解决，常用的方法有分组求和、裂项求和等.

(2)非等差、等比数列求通项问题，可对 a_n 所满足的关系式进行变形，转化为等差或等比数列，借助于求和公式得出数列的通项公式.