抛物线的焦点弦常用结论及其应用

知识纵横

1. 抛物线焦点弦的常用性质

已知直线 l' 过抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F，交抛物线 C 于 A，B(点 A 在 x 轴上方)两点，其中 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 l' 的倾斜角为 α，抛物线 C 的准线为 l，如左下图所示，则有：

① $x_1x_2=\dfrac{p^2}{4}$；$y_1y_2=-p^2$；

(2) $|AF|=x_1+\dfrac{p}{2}=\dfrac{p}{1-\cos\alpha}$，$|BF|=x_2+\dfrac{p}{2}=\dfrac{p}{1+\cos\alpha}$，$\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}=\dfrac{2}{p}$；

(3) $|AB|=x_1+x_2+p=\dfrac{2p}{\sin^2\alpha}$，$S_{\triangle AOB}=\dfrac{p^2}{2\sin\alpha}$；

(4) 从点 A，B 分别作准线的垂线，垂足分别为 M，N，从弦 AB 的中点 D 作准线的垂线，垂足为 D'，则有：

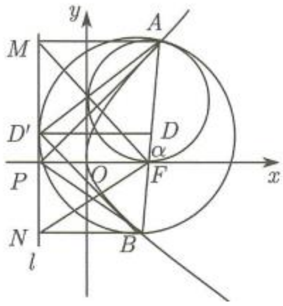
① $\angle MFN=90^\circ$；

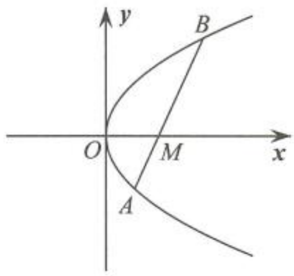
② $\angle AD'B=90^\circ$ 即以 AB 为直径的圆与准线 l 相切；

③以 AF(或 BF)为直径的圆与 y 轴相切；

(5) 准线与 x 轴的交点为 P，则 $k_{PA}+k_{PB}=0$，即 $\angle APF=\angle BPF$；

(6) $BN\perp l$ 于点 N，$AM\perp l$ 于点 M，则点 A，O，N 共线，点 B，O，M 共线.



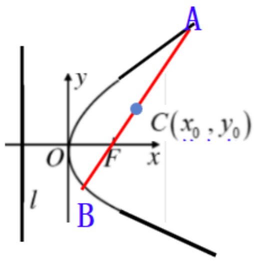


中点弦斜率：若 AB 斜率为 k，$C(x_0,y_0)$，则 $k=\dfrac{p}{y_0}$.

AB的中点

$\because y_1^2=2px_1$，$y_2^2=2px_2$，由点差法得 $y_1^2-y_2^2=2p(x_1-x_2)$，

$\therefore (y_1+y_2)(y_1-y_2)=2p(x_1-x_2)$，$\therefore k=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{2p}{y_1+y_2}=\dfrac{p}{y_0}$



三. 直线与圆锥曲线相交——弦长公式

若直线$y=kx+b$和圆锥曲线相交于两点：$P(x_1, y_1)$、$Q(x_2, y_2)$，

且直线$y=kx+b$和圆锥曲线联立得：$Ax^2+Bx+C=0$，则：

$$|PQ|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_2-x_1|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_2+x_1)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{\sqrt{\triangle}}{|A|}$$

若直线$y=kx+b$和圆锥曲线相交于两点：$P(x_1, y_1)$、$Q(x_2, y_2)$，

且直线$y=kx+b$和圆锥曲线联立得：$Ay^2+By+C=0$，则：

$$|PQ|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\cdot|y_2-y_1|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\cdot\frac{\sqrt{\triangle}}{|A|}$$

二、 解决圆锥曲线的中点弦问题的3种方法

方法1:方程组法

通过解直线方程与圆锥曲线方程构成的方程组，利用一元二次方程根与系数的关系及中点坐标公式求解.

方法2：(1)应用点差法可求出弦所在直线的斜率，点差法又称为“设而不求法”

(2)中点弦问题通常采用韦达定理或点差法求解.

点差法：设点(设出点坐标)→代入(代入曲线方程)→作差(两式相减).

方法3:中点转移法

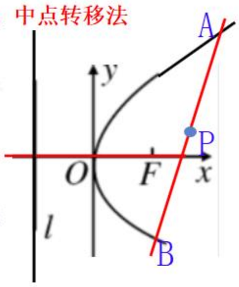
先设出弦的一个端点的坐标，再借助中点得出弦的另一个端点的坐标，分别代入圆锥曲线方程中做差可得.

这三种方法中以点差法最为常用，点差法中体现的设而不求思想，还可以用于解决对称问题.因为这类问题也与弦中点和斜率有关.

类型二　与弦长、中点有关的问题(数学运算)

【典例】过点 $P(4,1)$作抛物线 $y^2=8x$ 的弦 AB，弦 AB 恰被点 P 平分，求 AB 所在直线的方程及弦 AB 的长度．

中点弦：点差法、方程组法、中点转移法



【解析】方法一：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则有 $y_1^2=8x_1$，$y_2^2=8x_2$，两式相减，

得$(y_1-y_2)(y_1+y_2)=8(x_1-x_2)$.

因为 P 是 AB 的中点，

所以 $x_1+x_2=8$，$y_1+y_2=2$，

则 $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{8}{y_1+y_2}=4$，

所以所求直线 AB 的方程为 $y-1=4(x-4)$，

即 $4x-y-15=0$.

由$\begin{cases}4x-y-15=0,\\ y^2=8x\end{cases}$

消 x 整理得 $y^2-2y-30=0$，

则 $y_1+y_2=2$，$y_1y_2=-30$.

由弦长公式得$|AB|=\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}\sqrt{(y_1-y_2)^2}$

$=\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\dfrac{\sqrt{527}}{2}$.

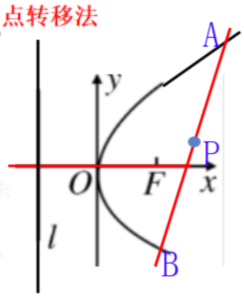
方法1：(1)应用点差法可求出弦所在直线的斜率，点差法又称为“设而不求法”

(2)中点弦问题通常采用韦达定理或点差法求解.

点差法：设点(设出点坐标)→代入(代入曲线方程)→作差(两式相减).

【典例】过点 $P(4,1)$作抛物线 $y^2=8x$ 的弦 AB，弦 AB 恰被点 P 平分，求 AB 所在直线的方程及弦 AB 的长度．

中点弦：点差法、方程组法、中点转移法



方法二：由题意知 AB 所在直线的斜率存在且不为 0.

设 AB 所在直线的方程为 $y=k(x-4)+1(k\neq0)$，

由$\begin{cases}y=k(x-4)+1,\\ y^2=8x\end{cases}$

消 x 整理得 $ky^2-8y-32k+8=0$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则 $y_1+y_2=\dfrac{8}{k}$，

因为 P 是 AB 的中点，所以$\dfrac{y_1+y_2}{2}=1$，

所以$\dfrac{8}{k}=2$，所以 $k=4$.

所以所求直线 AB 的方程为 $4x-y-15=0$.

由$\begin{cases}4x-y-15=0,\\ y^2=8x\end{cases}$

消 x 整理得 $y^2-2y-30=0$，

则 $y_1+y_2=2$，$y_1y_2=-30$，

由弦长公式得$|AB|=\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}|y_1-y_2|$

$=\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\dfrac{\sqrt{527}}{2}$.

方法2：方程组法

通过解直线方程与椭圆方程构成的方程组，利用一元二次方程根与系数的关系及中点坐标公式求解.

跟踪训练

(2021 玉林高二检测)已知抛物线 C: $y^2=2px$ 的焦点为 F，$M(1,t)$为抛物线 C 上的点，且$|MF|=\dfrac{3}{2}$.

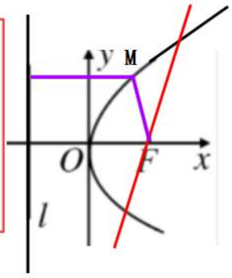
(1)求抛物线 C 的方程；

1. 抛物线焦点弦的常用性质

已知直线 l' 过抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F，交抛物线 C 于 A，B(点 A 在 x 轴上方)两点，其中 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 l' 的倾斜角为 α，抛物线 C 的准线为 l，如左下图所示，则有：

①$x_1x_2=\dfrac{p^2}{4}$；$y_1y_2=-p^2$；(2)$|AF|=x_1+\dfrac{p}{2}=\dfrac{p}{1-\cos\alpha}$，$|BF|=x_2+\dfrac{p}{2}=\dfrac{p}{1+\cos\alpha}$，$\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}=\dfrac{2}{p}$；

(3)$|AB|=x_1+x_2+p=\dfrac{2p}{\sin^2\alpha}$，$S_{\triangle AOB}=\dfrac{p^2}{2\sin\alpha}$；



【解析】(1)$|MF|=1+\dfrac{p}{2}=\dfrac{3}{2}$，所以 $p=1$，即抛物线 C 的方程 $y^2=2x$.

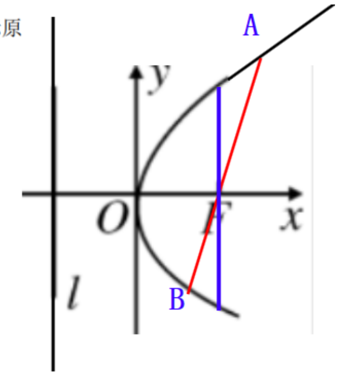
(2)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由$\begin{cases}y^2=2x\\ y=x-2\end{cases}$ 得 $x^2-6x+4=0$，所以 $x_1+x_2=6$，$x_1x_2=4$，

所以$|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{2}\times\sqrt{36-16}=2\sqrt{10}$.

1．已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，过焦点 F 的直线交抛物线于 A,B 两点，O 为坐标原点，若 $|AB|=6$，则 ΔAOB 的面积为

A．$\sqrt{6}$　B．$2\sqrt{2}$　C．$2\sqrt{3}$　D．4



通径长公式：$|AB|=2p$（通径最短）

当直线的斜率不存在时，则 $AB=2P=4\neq6$，则直线的斜率存在.

【详解】解：设直线 AB 的方程为：$y=k(x-1)$，

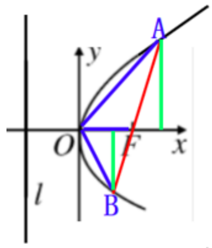
与抛物线方程联立可得：$y^2-\frac{4}{k}y-4=0$，则：$y_1+y_2=\frac{k}{4}, y_1\cdot y_2=-4$，

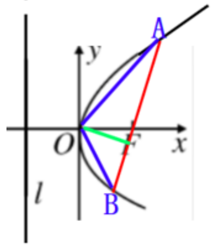
由弦长公式可得 $|AB|=\sqrt{\left(1+\frac{1}{k^2}\right)}\times|y_1-y_2|=\sqrt{\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\times\left[(y_1+y_2)^2-4y_1\cdot y_2\right]}=4\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}=4\left(1+\frac{1}{k^2}\right)=6$

$\therefore k^2=2,\ |y_1-y_2|=2\sqrt{6}$

三角形的面积为：$S=\frac{1}{2}\times|OF|\times|y_1-y_2|=\frac{1}{2}\times1\times2\sqrt{6}=\sqrt{6}$

或 $d_{o\to l:kx-y-k=0}=\frac{|k|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$S=\frac{1}{2}\times|AB|\times d_{o\to l}=\frac{1}{2}\times6\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\sqrt{6}$.



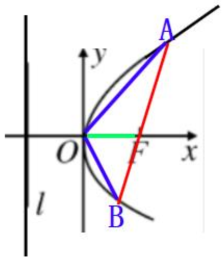


也可以避开讨论设直线 AB 的方程为：$x=my+1$，再与抛物线联立.

2．已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，过焦点 F 的直线交抛物线于 A,B 两点，O 坐标原点，

若 $\triangle AOB$ 的面积为 $2\sqrt{6}$，则 $|AB|=$

A．24　B．8　C．12　D．16



【详解】抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 坐标为 $F(1,0)$，过焦点 $F(1,0)$ 的直线设为 $x=my+1$，

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，联立 $\begin{cases}x=my+1\\y^2=4x\end{cases}$ 有 $y^2-4my-4=0$，所以有 $\begin{cases}y_1+y_2=4m\\y_1y_2=-4\end{cases}$

由 $S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}\cdot|OF|\cdot|y_1-y_2|=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=2\sqrt{6}$，，

$\therefore\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{16m^2+16}=4\sqrt{6}$，所以有 $m=\pm\sqrt{5}$

$\therefore|AB|=\sqrt{1+m^2}\,|y_1-y_2|=\sqrt{1+m^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{6}\times4\sqrt{6}=24$

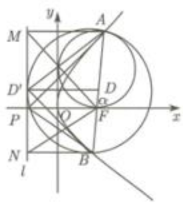
小题方法：$\because S_{\Delta AOB}=\frac{p^2}{2\sin\alpha}=\frac{4}{2\sin\alpha}=2\sqrt{6},\ \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{6}},\ \therefore|AB|=\frac{2p}{\sin^2\alpha}=24$

1. 抛物线焦点弦的常用性质

已知直线 l' 过抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F，交抛物线 C 于 A，B(点 A 在 x 轴上方)两点，其中 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 l' 的倾斜角为 α，抛物线 C 的准线为 l，如左下图所示，则有：

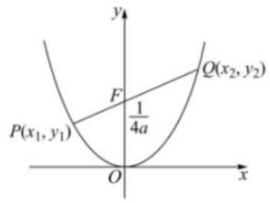
①$x_1x_2=\frac{p^2}{4}$；$y_1y_2=-p^2$；(2)$|AF|=x_1+\frac{p}{2}=\frac{p}{1-\cos\alpha}$，$|BF|=x_2+\frac{p}{2}=\frac{p}{1+\cos\alpha}$，$\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2}{p}$；

(3)$|AB|=x_1+x_2+p=\frac{2p}{\sin^2\alpha}$，$S_{\Delta AOB}=\frac{p^2}{2\sin\alpha}$；



3．过抛物线 $y=ax^2$（$a>0$）的焦点 F 作一直线交抛物线于 P、Q 两点，若线段 PF 与 FQ 的长分别为 p、q，则 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ 等于

3．过抛物线 $y=ax^2$（$a>0$）的焦点 F 作一直线交抛物线于 P、Q 两点，若线段 PF 与 FQ 的长分别为 p、q，则 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ 等于



【详解】设 $P(x_1,\ y_1)$，$Q(x_2,\ y_2)$，抛物线 $y=ax^2(a>0)$ 转化成标准方程：$x^2=\frac{1}{a}y$，

$\therefore$ 焦点 F 坐标 $(0,\frac{1}{4a})$，准线方程为 $x=-\frac{1}{4a}$，设过 $F(0,\frac{1}{4a})$ 的 AB 直线方程为 $y=kx+\frac{1}{4a}$，

$\therefore\begin{cases}y=kx+\frac{1}{4a}\\ y=ax^2\end{cases}$，整理得 $ax^2-kx-\frac{1}{4a}=0$．由韦达定理可知：$x_1x_2=\frac{1}{4}$，$x_1+x_2=\frac{k}{a}$，

$\therefore y_1+y_2=k(x_1+x_2)+\frac{1}{2a}=\frac{k^2}{a}$，$y_1y_2=(kx_1+\frac{1}{4a})(kx_2+\frac{1}{4a})=\frac{1}{16a^2}$，

根据抛物线性质可知，$p=y_1+\frac{a}{4}$，$q=y_2+\frac{p}{2}$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{p+q}{pq}=\frac{y_1+y_2+\frac{a}{2}}{(y_1+\frac{p}{4})(y_2+\frac{p}{4})}=\frac{\frac{k^2+1}{a}}{\frac{k^2+1}{4a^2}}=4a$，

$\therefore\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ 的值为 $4a$，

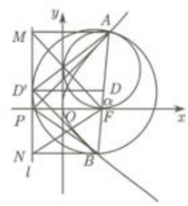
小题方法：$\because x^2=\frac{1}{a}y=2py,\ 2p=\frac{1}{a},\ \therefore p=\frac{1}{2a},\ \therefore\frac{1}{|PF|}+\frac{1}{|FQ|}=\frac{2}{p}=4a$

1. 抛物线焦点弦的常用性质

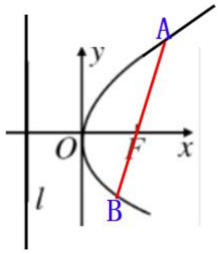
已知直线 l' 过抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F，交抛物线 C 于 A，B（点 A 在 x 轴上方）两点，其中 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 l' 的倾斜角为 α，抛物线 C 的准线为 l，如左下图所示，则有：

①$x_1x_2=\frac{p^2}{4}$；$y_1y_2=-p^2$；(2)$|AF|=x_1+\frac{p}{2}=\frac{p}{1-\cos\alpha}$，$|BF|=x_2+\frac{p}{2}=\frac{p}{1+\cos\alpha}$，$\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2}{p}$；

(3)$|AB|=x_1+x_2+p=\frac{2p}{\sin^2\alpha}$，$S_{\triangle AOB}=\frac{p^2}{2\sin\alpha}$；



4．直线过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 且交抛物线于 A，B 两点，A 在 x 轴上方，若 $|AF|=5$，求 $|BF|$．



【详解】由对称性，不妨设 AB 的**倾斜角** α **为锐角**，$5>2=p$，由**焦半径长公式**：

$|AF|=x_1+\frac{p}{2}=\frac{p}{1-\cos\alpha}$，$|BF|=x_2+\frac{p}{2}=\frac{p}{1+\cos\alpha}$（A 在 x 轴上方，B 在 x 轴下方）

可得：$\because|AF|=5$，$\therefore\frac{2}{1-\cos\alpha}=5$，$\therefore\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\therefore|BF|=\frac{2}{1+\frac{3}{5}}=\frac{5}{4}$．

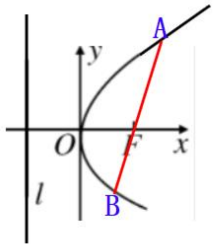
1. 抛物线焦点弦的常用性质

已知直线 l' 过抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F，交抛物线 C 于 A，B（点 A 在 x 轴上方）两点，其中 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 l' 的倾斜角为 α，抛物线 C 的准线为 l，如左下图所示，则有：

①$x_1x_2=\frac{p^2}{4}$；$y_1y_2=-p^2$；(2)$|AF|=x_1+\frac{p}{2}=\frac{p}{1-\cos\alpha}$，$|BF|=x_2+\frac{p}{2}=\frac{p}{1+\cos\alpha}$，$\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2}{p}$；

(3)$|AB|=x_1+x_2+p=\frac{2p}{\sin^2\alpha}$，$S_{\triangle AOB}=\frac{p^2}{2\sin\alpha}$；

5．直线过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 且交抛物线于 A，B 两点，A 在 x 轴上方，直线倾斜角为 $60°$，求 $S_{\triangle OAF}$．



【详解】由题意 $|AF|=x_1+\frac{p}{2}=\frac{p}{1-\cos\alpha}=\frac{2}{1-\frac{1}{2}}=4$，$\therefore S_{\triangle AOF}=\frac{1}{2}|OF||AF|\cdot\sin120°=\frac{1}{2}\times1\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

6．若抛物线 $y^2=3x$，过焦点 F 作倾斜角为 $30°$ 的直线与抛物线交于 A，B，求 $|AB|$．

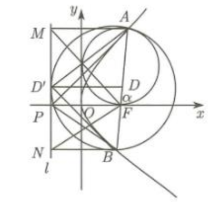
【详解】$|AB|=\frac{2p}{\sin^2\alpha}=\frac{3}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=12$．

1. 抛物线焦点弦的常用性质

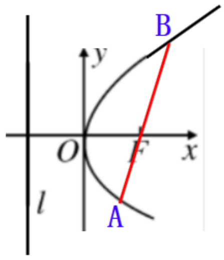
已知直线 l' 过抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F，交抛物线 C 于 A，B（点 A 在 x 轴上方）两点，其中 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 l' 的倾斜角为 α，抛物线 C 的准线为 l，如左下图所示，则有：

①$x_1x_2=\frac{p^2}{4}$；$y_1y_2=-p^2$；(2)$|AF|=x_1+\frac{p}{2}=\frac{p}{1-\cos\alpha}$，$|BF|=x_2+\frac{p}{2}=\frac{p}{1+\cos\alpha}$，$\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2}{p}$；

(3)$|AB|=x_1+x_2+p=\frac{2p}{\sin^2\alpha}$，$S_{\triangle AOB}=\frac{p^2}{2\sin\alpha}$；



7．直线过抛物线 $y^2=2x$ 的焦点 F 且交抛物线于 A，B 两点，若 $|AB|=\frac{25}{12}$，$|AF|<|BF|$，求 $|AF|$．

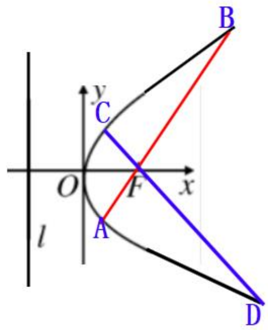


【分析】根据抛物线的焦点弦长公式 $l=\frac{2p}{\sin^2\alpha}$（$\alpha$ 为焦点弦所在直线的倾斜角）求出弦所在直线的倾斜角的正弦，再由焦半径公式较短的 $|AF|=\frac{p}{1+\cos\alpha}$，较长的 $|BF|=\frac{p}{1-\cos\alpha}$ 计算．

【详解】设 AB 倾斜角为 α，且 α 为锐角，则

$$|AB|=\frac{2}{\sin^2\alpha}=\frac{25}{12},\therefore\sin\alpha=\frac{2p}{\sin^2\alpha}=\frac{2\sqrt{6}}{5},\therefore\cos\alpha=\frac{1}{5},\therefore|AF|=\frac{p}{1+\cos\alpha}=\frac{1}{1+\frac{1}{5}}=\frac{5}{6}$$

8．若抛物线 $y^2=4x$，过焦点 F 作两条互相垂直的直线分别于抛物线交于 A，B 和 C，D，求 $(|AB|+|CD|)_{\min}$．



【详解】设直线 AB 的倾斜角为 θ，

$$则|AB|=\frac{2p}{\sin^2\theta}=\frac{4}{\sin^2\theta}，|CD|=\frac{2p}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}=\frac{4}{\cos^2\theta},$$

$$\therefore|AB|+|CD|=\frac{4}{\sin^2\theta}+\frac{4}{\cos^2\theta}=\frac{4}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=\frac{4}{\frac{1}{4}\sin^2 2\theta}=\frac{16}{\sin^2 2\theta},$$

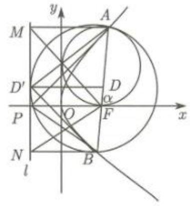
当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$ 时，$\sin^2 2\theta=1$，$(|AB|+|CD|)_{\min}=16$

1. 抛物线焦点弦的常用性质

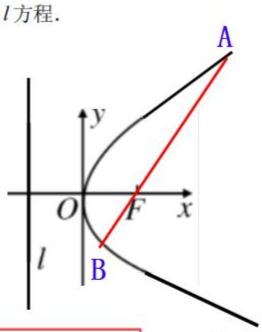
已知直线 l' 过抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F，交抛物线 C 于 A，B（点 A 在 x 轴上方）两点，其中 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 l' 的倾斜角为 α，抛物线 C 的准线为 l，如左下图所示，则有：

①$x_1x_2=\frac{p^2}{4}$；$y_1y_2=-p^2$；(2)$|AF|=x_1+\frac{p}{2}=\frac{p}{1-\cos\alpha}$，$|BF|=x_2+\frac{p}{2}=\frac{p}{1+\cos\alpha}$，$\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2}{p}$；

(3)$|AB|=x_1+x_2+p=\frac{2p}{\sin^2\alpha}$，$S_{\triangle AOB}=\frac{p^2}{2\sin\alpha}$；



9．若抛物线 $y^2=4x$，过焦点 F 作直线与抛物线交于 A，B，若 $|AF|=3|BF|$，求直线 l 方程．



【详解】先设直线 AB 倾斜角 α 为锐角，

$$\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}=3,\therefore\cos\alpha=\frac{1}{2},\therefore k=\tan\alpha=\sqrt{3},l:y=\sqrt{3}(x-1).$$

由对称性直线 l 方程还可以为 $y=-\sqrt{3}(x-1)$，

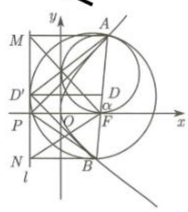
综上，直线 l 的方程为 $\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0$ 或 $\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}=0$．

1. 抛物线焦点弦的常用性质

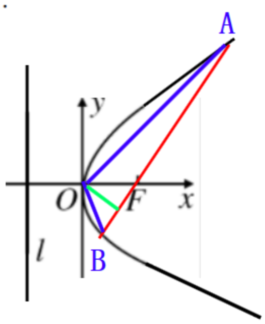
已知直线 l' 过抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F，交抛物线 C 于 A，B(点 A 在 x 轴上方)两点，其中 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 l' 的倾斜角为 α，抛物线 C 的准线为 l，如左下图所示，则有：

①$x_1x_2=\frac{p^2}{4}$；$y_1y_2=-p^2$；(2)$|AF|=x_1+\frac{p}{2}=\frac{p}{1-\cos\alpha}$，$|BF|=x_2+\frac{p}{2}=\frac{p}{1+\cos\alpha}$，$\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2}{p}$；

(3)$|AB|=x_1+x_2+p=\frac{2p}{\sin^2\alpha}$，$S_{\triangle AOB}=\frac{p^2}{2\sin\alpha}$；



10．若抛物线 $y^2=3x$，过焦点 F 且倾斜角为 30° 的直线交抛物线于 A，B 两点，求 $S_{\triangle OAB}$．



【详解】由题意得：$F\left(\frac{3}{4},0\right)$，$k_{AB}=\tan30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故直线 AB 的方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{3}{4}\right)$，

由 $\begin{cases}y=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{3}{4}\right)\\ y^2=3x\end{cases}$ 联立得：$\frac{1}{3}x^2-\frac{7}{2}x+\frac{3}{16}=0$，

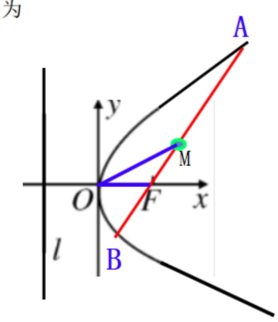
设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{21}{2},x_1x_2=\frac{9}{16}$，

则 $|AB|=\sqrt{(1+k^2)\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]}=\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{21}{2}\right)^2-4\times\frac{9}{16}}=12$，

点 $O(0,0)$ 到直线 AB 的距离为 $d=\frac{\left|\frac{\sqrt{3}}{4}\right|}{\sqrt{1+\frac{1}{3}}}=\frac{3}{8}$，

所以 $S_{\triangledown OAB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}\times12\times\frac{3}{8}=\frac{9}{4}$

11．斜率为 k 的直线过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点且与抛物线交于 A，B 两点，O 为原点，M 为 AB 中点，且 $S_{\triangle OFM}=2$，求 k．



【详解】设 $M(x,y)$，设 $y>0$，$2p=4$，$p=2$，

$\because S_{\triangle OFM}=2$，又 $S_{\triangle OFM}=\frac{1}{2}\times1\times y$，$\therefore\frac{1}{2}y=2,\therefore y=4$，

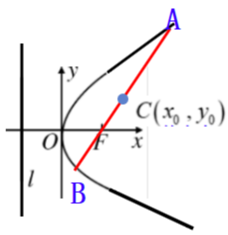
所以 $k=\frac{p}{y}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，由对称性，$k=-\frac{1}{2}$ 也适合．综上，$k=\pm\frac{1}{2}$．

中点弦斜率：若 AB 斜率为 k，$C(x_0,y_0)$，则 $k=\frac{p}{y_0}$．

AB的中点

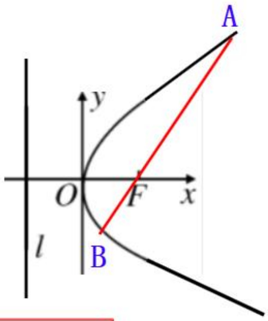
$\because y_1^2=2px_1$，$y_2^2=2px_2$，由点差法得 $y_1^2-y_2^2=2p(x_1-x_2)$，

$\therefore(y_1+y_2)(y_1-y_2)=2p(x_1-x_2)$，$\therefore k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{2p}{y_1+y_2}=\frac{p}{y_0}$



12. 直线$x-\sqrt{3}y-1=0$与抛物线$y^2=4x$交于A，B两点，则$|AB|=$（ ）

A. $4\sqrt{3}$　B. 8　C. $8\sqrt{3}$　D. 16



【详解】抛物线$y^2=4x$的焦点为$(1,0)$在直线$x-\sqrt{3}y-1=0$上，故AB是抛物线的焦点弦，

则由$\begin{cases}x-\sqrt{3}y-1=0\\ y^2=4x\end{cases}$得：$x^2-14x+1=0$，设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=14$，

所以，$|AB|=x_1+x_2+p=14+2=16$

1. 抛物线焦点弦的常用性质

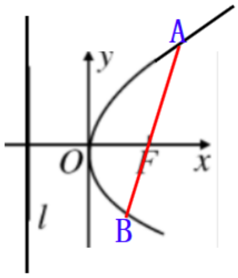
已知直线l'过抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点F，交抛物线C于A，B（点A在x轴上方）两点，其中$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线l'的倾斜角为α，抛物线C的准线为l，如左下图所示，则有：

①$x_1x_2=\frac{p^2}{4}$；$y_1y_2=-p^2$；(2)$|AF|=x_1+\frac{p}{2}=\frac{p}{1-\cos\alpha}$，$|BF|=x_2+\frac{p}{2}=\frac{p}{1+\cos\alpha}$，$\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2}{p}$；

(3)$|AB|=x_1+x_2+p=\frac{2p}{\sin^2\alpha}$，$S_{\triangle AOB}=\frac{p^2}{2\sin\alpha}$；

13. 过抛物线$y^2=4x$的焦点F的直线与其交于A，B两点，$|AF|>|BF|$，如果$|AF|=5$，那么$|BF|=$（ ）

A. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$　B. $\frac{5}{4}$　C. $\frac{5}{2}$　D. $\frac{3}{2}$



【详解】解：抛物线的焦点$F(1,0)$，准线方程为$x=-1$，

设$A(x,y)$，则$|AF|=x+1=5$，故$x=4$，此时$y=4$，

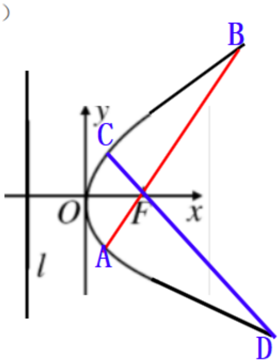
即$A(4,4)$，则直线AF的方程为$\frac{y-0}{4-0}=\frac{x-1}{4-1}$，即$y=\frac{4}{3}(x-1)$，

由$\begin{cases}y=\frac{4}{3}(x-1)\\ y^2=4x\end{cases}$得$4x^2-17x+4=0$，解得$x=4$（舍）或$x=\frac{1}{4}$，则$|BF|=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$

$|AF|=x_1+\frac{p}{2}=\frac{p}{1-\cos\alpha}$，$|BF|=x_2+\frac{p}{2}=\frac{p}{1+\cos\alpha}$

14. 过抛物线$y^2=4x(p>0)$的焦点作两条互相垂直的弦AB、CD，则$\frac{1}{|AB|}+\frac{1}{|CD|}=$（ ）

A. 2　B. 4　C. $\frac{1}{2}$　D. $\frac{1}{4}$



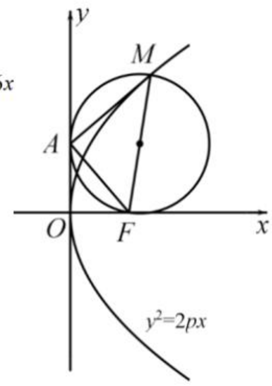
【详解】抛物线$y^2=4x$，可知$2p=4$，

设直线l_1的倾斜角为θ，则l_2的倾斜角为$\left|\frac{\pi}{2}-\theta\right|$，显然$\theta\neq\frac{\pi}{2}$，

过焦点的弦，$|AB|=\frac{2p}{\sin^2\theta}$，$|CD|=\frac{2p}{\sin^2\left|\frac{\pi}{2}-\theta\right|}=\frac{2p}{\cos^2\theta}$

$\therefore\frac{1}{|AB|}+\frac{1}{|CD|}=\frac{\sin^2\theta}{2p}+\frac{\cos^2\theta}{2p}=\frac{1}{2p}=\frac{1}{4}$，

15．设抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点为 F，点M在 C上，$|MF|=5$，若以 MF为直径的圆过点（0,2)，则C的方程为



A. $y^2=4x$或 $y^2=8x$ B. $y^2=2x$或 $y^2=8x$ C. $y^2=4x$或 $y^2=16x$ D. $y^2=2x$或 $y^2=16x$

【详解】∵抛物线C 方程为$y^2=2px(p>0)$,∴焦点$F(\frac{p}{2},0)$,

设$M(x,y)$,由抛物线性质$|MF|=x+\frac{p}{2}=5$,可得$x=5-\frac{p}{2}$,

因为圆心是MF的中点,所以根据中点坐标公式可得,圆心横坐标为$\frac{5}{2}$,

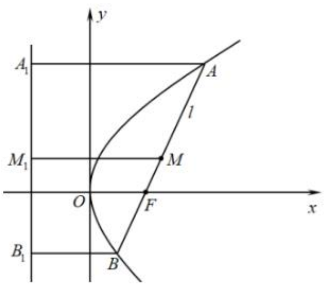
由已知圆半径也为$\frac{5}{2}$,据此可知该圆与 y 轴相切于点(0,2),

故圆心纵坐标为 2，则 M 点纵坐标为 4，

即$M(5-\frac{p}{2},4)$,代入抛物线方程得$p^2-10p+16=0$，所以 p=2 或 p=8.

所以抛物线 C 的方程为$y^2=4x$或$y^2=16x$.故答案 C.

16．已知直线l过抛物线$C:y^2=4x$的焦点，并且与抛物线C交于不同的两点A、B，若$M(2,y_0)$为线段AB的中点，则$|AB|$的值为（ ）



A．4 B．5 C．6 D．8

【详解】抛物线$C:y^2=4x$的准线方程为：$x=-1$

分别过A,B,M作准线的垂线，垂足分别为A_1,B_1,M_1

则点$M(2,y_0)$到准线的距离为$2+1=3$

根据抛物线的定义可得$|AF|=|AA_1|,|BF|=|BB_1|$,

且$|MM_1|=\frac{|AA_1|+|BB_1|}{2}=\frac{|AF|+|BF|}{2}=\frac{|AB|}{2}$

所以$|AB|=2|MM_1|=6$

故选：C