圆锥曲线的最值问题

高考地位:

最值问题是高考的热点，而圆锥曲线的最值问题几乎是高考的必考点，不仅会在选择题或填空题中进行考察，在综合题中也往往将其设计为试题考查的核心。

方法一：圆锥曲线的定义转化法

根据圆锥曲线的定义，把所求的最值转化为平面上两点之间的距离、点线之间的距离等，这是求圆锥曲线最值问题的基本方法。

关键：用好圆锥曲线的定义

1、**椭圆的定义**：平面内与两个定点 F_1，F_2 的距离之和等于常数（大于 $|F_1F_2|$）的点的轨迹称为**椭圆**.

即：$|MF_1|+|MF_2|=2a,(2a>|F_1F_2|)$.这两个定点称为**椭圆的焦点**，**两焦点的距离称为椭圆的焦距**.

2、**双曲线的定义**：平面内与两个定点 F_1，F_2 的距离之差的绝对值等于常数（小于 $|F_1F_2|$ 的点的轨迹称为**双曲线**.

即：$||MF_1|-|MF_2||=2a,(2a<|F_1F_2|)$。这两个定点称为**双曲线的焦点**，**两焦点的距离称为双曲线的焦距**.

3、**抛物线的定义**：平面内与一个定点F和一条定直线l的距离相等的点的轨迹称为**抛物线**.
定点F称为**抛物线的焦点**，定直线l称为**抛物线的准线**.

例 1、（1）若抛物线 $y^2=4x$ 的准线为 l，P 是抛物线上任意一点，则 P 到准线 l 的距离与 P 到直线 $3x+4y+7=0$ 的距离之和的最小值是（ ）

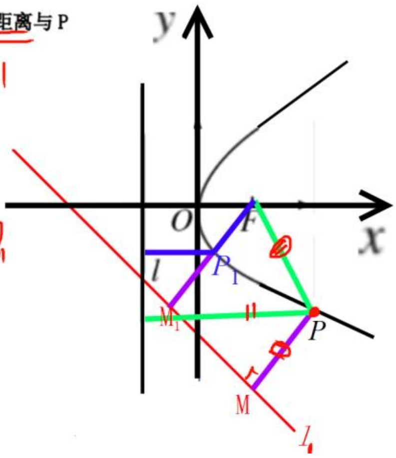
l_1　　$p=2$　　$x=-1$　　$d_{P\to l}=|PF|$

(A) 2　　(B) $\frac{13}{5}$　　(C) $\frac{14}{5}$　　(D) 3

$d_{P\to l_1}$

$\therefore d_{P\to l}+d_{P\to l_1}=|PF|+d_{P\to l_1}=|PF|+|PM|\geq|FM|=d_{F\to l_1}$

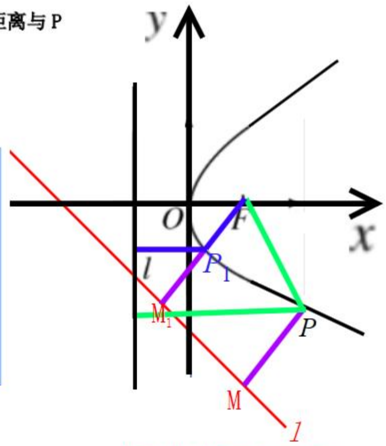
当 P.F.M 三点共线，此等成立



例 1、（1）若抛物线 $y^2=4x$ 的准线为 l，P 是抛物线上任意一点，则 P 到准线 l 的距离与 P 到直线 $3x+4y+7=0$ 的距离之和的最小值是（ ）

(A) 2　　(B) $\frac{13}{5}$　　(C) $\frac{14}{5}$　　(D) 3

解析: 由抛物线定义可知点 P 到准线 l 的距离等于点 P 到焦点 F 的距离，由抛物线 $y^2=4x$ 及直线方程 $3x+4y+7=0$ 可得直线与抛物线相离。
所以点 P 到准线 l 的距离与点 P 到直线 $3x+4y+7=0$ 的距离之和的最小值为点 F(1,0)到直线 $3x+4y+7=0$ 的距离，即 $\frac{|3+7|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$。故选 A。



点到线的距离最短

抛物线的定义：平面内与一个定点F和一条定直线l的距离相等的点的轨迹称为**抛物线**。
定点F称为**抛物线的焦点**，定直线l称为**抛物线的准线**。

（2）已知点 F 是双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ 的左焦点，定点 A（1，4），P 是双曲线右支上动点，则 $|PA|+|PF|$ 的最小值为______；则 $|PA|-|PF|$ 的最大值为______

解：$|PF|+|PA|=|PF|-|PF'|+|PA|+|PF'|$

$=2a+|PA|+|PF'|\geq 2a+|AF'|$

解：$|PA|-|PF|=|PA|-\left(|PF|-|PF'|\right)-|PF'|$

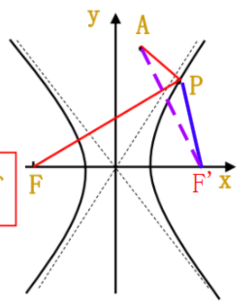
$=|PA|-|PF'|-2a\leq|AF'|-2a$

思维导图：

根据双曲线的定义，建立点A、P与两焦点之间的关系

↓

两点之间线段最短

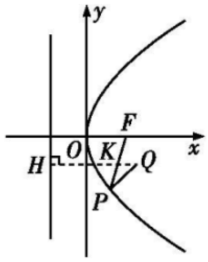


构造三角形 $\begin{cases}\text{两边之和}\geq\text{第三边}\\\text{两边之差}\leq\text{第三边}\end{cases}$，当三点共线等号成立

$\left||PF'|-|PA|\right|\leq|AF'|\Leftrightarrow-|AF'|\leq|PF'|-|PA|\leq|AF'|$

变式 1：

（1）已知 P 点为抛物线 $y^2=4x$ 上的点，那么 P 点到点 Q（2，-1）的距离与 P 点到抛物线焦点的距离之和的最小值为______，此时 P 点坐标为_______.

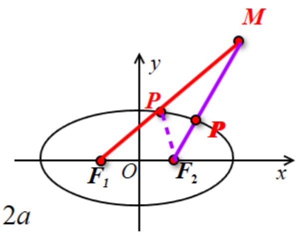


解：$|PQ|+|PF|=|PQ|+d_{P\to l}\geqslant d_{Q\to l}=3$，$\therefore P\left(\frac{1}{4},\ -1\right)$

构造三角形$\begin{cases}两边之和\geqslant第三边\\两边之差\leqslant第三边\end{cases}$，当三点共线等号成立

点到线的距离最短

（2）已知定点 M（4,10），F_1,F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{10}+y^2=1$ 的两个焦点，动点 P 在椭圆上，则 $|PM|-|PF_1|$ 的最小值__________ $|PM|+|PF_1|$ 的最大值__________



解：$|PM|-|PF_1|=|PM|-\left(2a-|PF_2|\right)=|PM|+|PF_2|-2a\geqslant|MF_2|-2a$

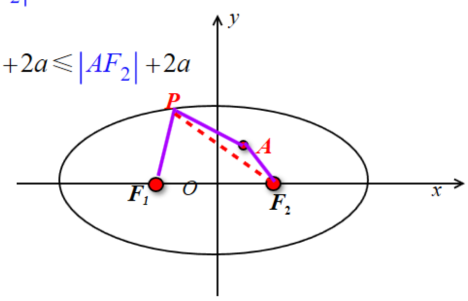
解：$|PM|+|PF_1|=|PM|+\left(2a-|PF_2|\right)=|PM|-|PF_2|+2a\leqslant|MF_2|+2a$

（3）已知 F_1,F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的两个焦点，定点 A（1,1），动点 P 在椭圆上，则 $|PA|+|PF_1|$ 的最小值为__________；$|PA|+|PF_1|$ 的最大值为__________

解：$\because|PA|+|PF_1|\geqslant|AF_2|$，$\therefore\left(|PA|+|PF_1|\right)_{min}=|AF_2|$

解：$\because|PA|+|PF_1|=|PA|+\left(2a-|PF_2|\right)=|PA|-|PF_2|+2a\leqslant|AF_2|+2a$

$\therefore\left(|PA|+|PF_1|\right)_{max}=|AF_2|+2a$



方法二：

切 线 法

当所求的最值是圆锥曲线上点到某条直线的距离的最值时，可以通过作与这条直线平行的圆锥曲线的切线，则两平行线间的距离就是所求的最值，切点就是曲线上去的最值时的点。

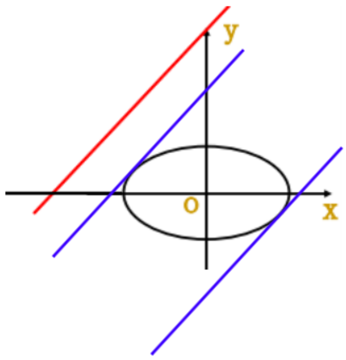
例 2、求椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 上的点到直线 $y=x+2\sqrt{3}$ 的距离的最大值和最小值，并求取得最值时椭圆上点的坐标.

思维导图：

求与 $y=x+2\sqrt{3}$ 平行的椭圆的切线

⬇

切线与直线 $y=x+2\sqrt{3}$ 的距离为最值，切点就是所求的点.



解：设椭圆与 $y=x+2\sqrt{3}$ 平行的切线方程为 $y=x+b$

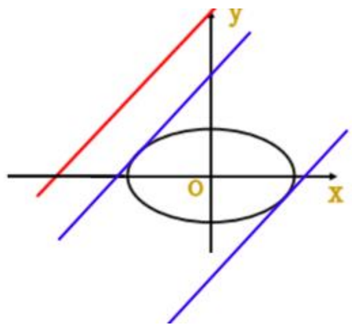
$$\therefore \begin{cases} y=x+b \\ \frac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases} \qquad \therefore 3x^2+4bx+2b^2-2=0$$

$$(1)\quad \Delta=(4b)^2-4\times3\times(2b^2-2)=0$$

$$\therefore b=\pm\sqrt{3}$$

1)当 $b=\sqrt{3}$ 时,代入(1)得 $d_{\min}=\frac{\sqrt{6}}{2}$;

2)当 $b=-\sqrt{3}$ 时,代入(1)得 $d_{\max}=\frac{3\sqrt{6}}{2}$.



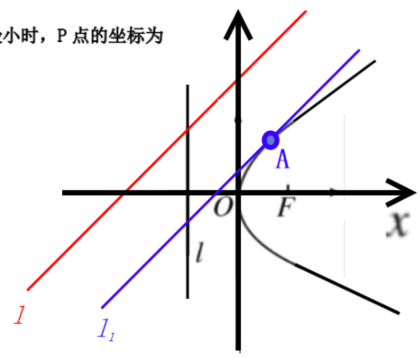
思路：1. 设与直线平行的圆锥曲线的切线方程；

2. 联立方程组，求判别式，从而得切线方程；

3. 再求两平行直线的距离。

自己补上例 2：求点的坐标；仿照例 2 的过程写出变式 2 的解答过程。

变式 2：动点 P 在抛物线 $y^2=x$ 上，则点 P 到直线 $y=x+4$ 的距离最小时，P 点的坐标为________.



方法三:

参 数 法

根据曲线方程的特点，用适当的参数表示曲线上点的坐标，把所求的最值归结为求解关于这个参数的函数的最值的方法.

关键：选取适当的参数表示曲线上的坐标

例 3、在平面直角坐标系中，P(x, y)是椭圆 $\frac{x^2}{2}+y=1$ 上动点，则 S=x+y 的最大值是____.

思维导图:

根据椭圆的参数方程表示x、y

↓

将S表示成关于参数的函数

解析：设P点坐标为 $\begin{cases} x=\sqrt{3}\cos\varphi \\ y=\sin\varphi \end{cases}$ $(0\le\varphi\le2\pi)$

则 $S=x+y=\sqrt{3}\cos\varphi+\sin\varphi$

$=2(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi+\frac{1}{2}\sin\varphi)$

$=2\sin(\varphi+\frac{\pi}{3})$

∴当 $\varphi=\frac{\pi}{6}$ 时，$S_{\max}=2$.

变式 3:（1）设 $a,b\in R$ ， $a^2+2b^2=6$，求 $a+\sqrt{2}b$ 的最大值和最小值，并求取得最值时 a、b 的值.

（2）设 P、Q 分别为圆 C: $x^2+(y-6)^2=2$ 和椭圆 $\frac{x^2}{10}+y^2=1$ 的点, 求 P、Q 两点间的最大距 离.