圆锥曲线的最值问题

高考地位:

最值问题是高考的热点，而圆锥曲线的最值问题几乎是高考的必考点，不仅会在选择题或填空题中进行考察，在综合题中也往往将其设计为试题考查的核心。

方法一：圆锥曲线的定义转化法

根据圆锥曲线的定义，把所求的最值转化为平面上两点之间的距离、点线之间的距离等，这是求圆锥曲线最值问题的基本方法。

关键：用好圆锥曲线的定义

1、**椭圆的定义**：平面内与两个定点 F_1，F_2 的距离之和等于常数（大于 $|F_1F_2|$）的点的轨迹称为**椭圆**.

即：$|MF_1|+|MF_2|=2a,(2a>|F_1F_2|)$.这两个定点称为**椭圆的焦点，两焦点的距离称为椭圆的焦距**.

2、**双曲线的定义**：平面内与两个定点 F_1，F_2 的距离之差的绝对值等于常数（小于 $|F_1F_2|$ 的点的轨迹称为**双曲线**.

即：$||MF_1|-|MF_2||=2a,(2a<|F_1F_2|)$。这两个定点称为**双曲线的焦点，两焦点的距离称为双曲线的焦距**.

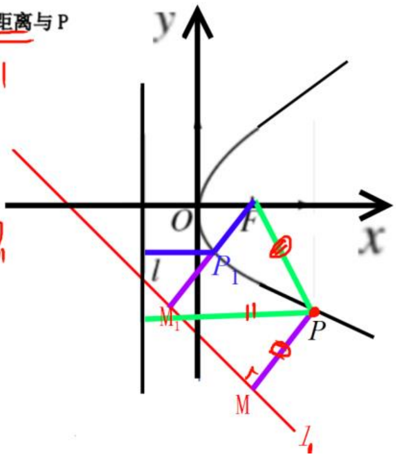
3、**抛物线的定义**：平面内与一个定点F和一条定直线l的距离相等的点的轨迹称为**抛物线**.
定点F称为**抛物线的焦点**，定直线l称为**抛物线的准线**.

例 1、（1）若抛物线 $y^2=4x$ 的准线为 l, P 是抛物线上任意一点，则 P 到准线 l 的距离与 P 到直线 3x+4y+7=0 的距离之和的最小值是（　）

$p=2$　　$x=-1$　　$d_{P\to l}=|PF|$

(A) 2　　(B) $\frac{13}{5}$　　(C) $\frac{14}{5}$　　(D) 3

$d_{P\to l_1}$



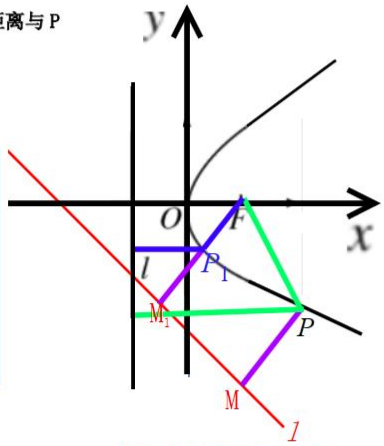
$\therefore d_{P\to l}+d_{P\to l_1}=|PF|+d_{P\to l_1}=|PF|+|PM|\geq|FM|=d_{F\to l_1}$

当 P.F.M 三点共线，等号成立

例 1、（1）若抛物线 $y^2=4x$ 的准线为 l, P 是抛物线上任意一点，则 P 到准线 l 的距离与 P 到直线 3x+4y+7=0 的距离之和的最小值是（　）

(A) 2　　(B) $\frac{13}{5}$　　(C) $\frac{14}{5}$　　(D) 3

解析: 由抛物线定义可知点 P 到准线 l 的距离等于点 P 到焦点 F 的距离,由抛物线 $y^2=4x$ 及直线方程 3x+4y+7=0 可得直线与抛物线相离.
所以点 P 到准线 l 的距离与点 P 到直线 3x+4y+7=0 的距离之和的最小值为点 F(1,0)到直线 3x+4y+7=0 的距离,即 $\frac{|3+7|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$.故选 A.



点到线的距离最短

抛物线的定义： 平面内与一个定点F和一条定直线l的距离相等的点的轨迹称为**抛物线**.
定点F称为**抛物线的焦点**，定直线l称为**抛物线的准线**.

（2）已知点 F 是双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ 的左焦点，定点 A（1，4），P 是双曲线右支上动点，则 $|PA|+|PF|$ 的最小值为______；则 $|PA|-|PF|$ 的最大值为______

解：$|PF|+|PA|=|PF|-|PF'|+|PA|+|PF'|$

$=2a+|PA|+|PF'|\geq 2a+|AF'|$

解：$|PA|-|PF|=|PA|-(|PF|-|PF'|)-|PF'|$

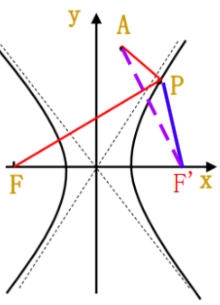
$=|PA|-|PF'|-2a\leq|AF'|-2a$

思维导图：

根据双曲线的定义，建立点A、P与两焦点之间的关系

↓

两点之间线段最短

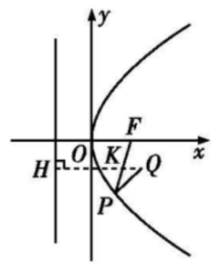


构造三角形 $\begin{cases}\text{两边之和}\geq\text{第三边}\\\text{两边之差}\leq\text{第三边}\end{cases}$，当三点共线等号成立

$\left||PF'|-|PA|\right|\leq|AF'|\Leftrightarrow-|AF'|\leq|PF'|-|PA|\leq|AF'|$

变式 1：

（1）已知 P 点为抛物线 $y^2=4x$ 上的点，那么 P 点到点 Q（2，-1）的距离与 P 点到抛物线焦点的距离之和的最小值为______，此时 P 点坐标为_______.

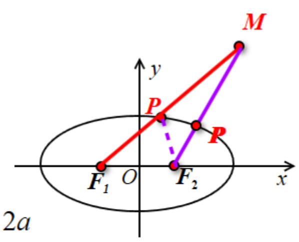


解：$|PQ|+|PF|=|PQ|+d_{P\to l}\geqslant d_{Q\to l}=3$，$\therefore P\left(\frac{1}{4},\ -1\right)$

构造三角形$\begin{cases}两边之和\geqslant第三边\\两边之差\leqslant第三边\end{cases}$，当三点共线等号成立

点到线的距离最短

（2）已知定点 M（4, 10），F_1,F_2是椭圆$\frac{x^2}{10}+y^2=1$的两个焦点，动点 P 在椭圆上，则 $|PM|-|PF_1|$的最小值________ $|PM|+|PF_1|$的最大值________



解：$|PM|-|PF_1|=|PM|-(2a-|PF_2|)=|PM|+|PF_2|-2a\geqslant|MF_2|-2a$

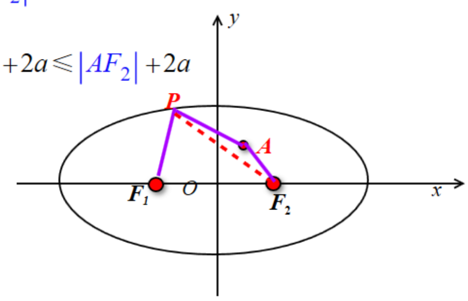
解：$|PM|+|PF_1|=|PM|+(2a-|PF_2|)=|PM|-|PF_2|+2a\leqslant|MF_2|+2a$

（3）已知 F_1,F_2是椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$的两个焦点，定点 A（1, 1），动点 P 在椭圆上，则 $|PA|+|PF_1|$的最小值为________；$|PA|+|PF_1|$的最大值为________

解：$\because|PA|+|PF_1|\geqslant|AF_2|$，$\therefore(|PA|+|PF_1|)_{min}=|AF_2|$

解：$\because|PA|+|PF_1|=|PA|+(2a-|PF_2|)=|PA|-|PF_2|+2a\leqslant|AF_2|+2a$

$\therefore(|PA|+|PF_1|)_{max}=|AF_2|+2a$

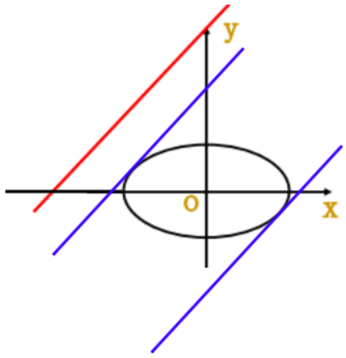


方法二：

切 线 法

当所求的最值是圆锥曲线上点到某条直线的距离的最值时，可以通过作与这条直线平行的圆锥曲线的切线，则两平行线间的距离就是所求的最值，切点就是曲线上去的最值时的点。

例 2、求椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 上的点到直线 $y=x+2\sqrt{3}$ 的距离的最大值和最小值，并求取得最值时椭圆上点的坐标.



思维导图：

求与 $y=x+2\sqrt{3}$ 平行的椭圆的切线

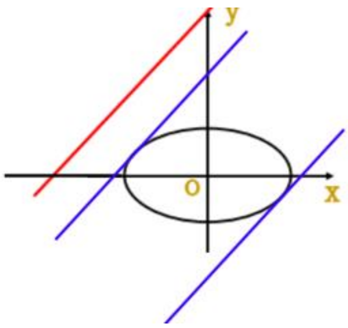
切线与直线 $y=x+2\sqrt{3}$ 的距离为最值，切点就是所求的点.

解：设椭圆与 $y=x+2\sqrt{3}$ 平行的切线方程为 $y=x+b$

$$\therefore \begin{cases} y=x+b \\ \frac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases} \quad \begin{aligned} &\therefore 3x^2+4bx+2b^2-2=0 \\ (1)\quad &\Delta=(4b)^2-4\times 3\times(2b^2-2)=0 \\ &\therefore b=\pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

1)当 $b=\sqrt{3}$ 时，代入（1）得 $d_{\min}=\frac{\sqrt{6}}{2}$；

2)当 $b=-\sqrt{3}$ 时，代入（1）得 $d_{\max}=\frac{3\sqrt{6}}{2}$.



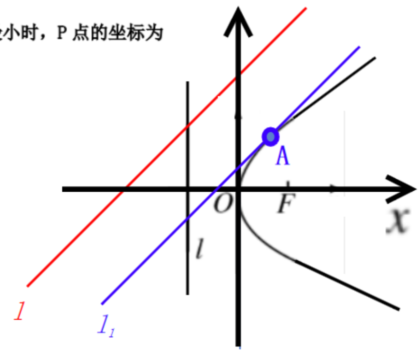
思路：1. 设与直线平行的圆锥曲线的切线方程；

2. 联立方程组，求判别式，从而得切线方程；

3. 再求两平行直线的距离。

自己补上例 2：求点的坐标；仿照例 2 的过程写出变式 2 的解答过程。

变式 2：动点 P 在抛物线 $y^2=x$ 上，则点 P 到直线 $y=x+4$ 的距离最小时，P 点的坐标为______.



方法三：

参 数 法

根据曲线方程的特点，用适当的参数表示曲线上点的坐标，把所求的最值归结为求解关于这个参数的函数的最值的方法.

关键：选取适当的参数表示曲线上的坐标

圆的标准方程 $\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.}$

圆心 $C(a,b)$、r

$\Downarrow$ 用参数

圆上点 $(a+r\cos\theta,\ b+r\sin\theta)$

10. 在平面直角坐标系中，如果点 P 的坐标 (x, y) 满足

逆推

$$\begin{cases} x=a+r\cos\theta, & \cdots ① \\ y=b+r\sin\theta, & \cdots ② \end{cases}$$

其中 θ 为参数. 证明：点 P 的轨迹是圆心为 (a, b)，半径为 r 的圆.

① $(x-2)^2+(y-3)^2=25$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=2+5\cos\theta \\ y=3+5\sin\theta \end{cases}$（$\theta$ 为参数）

由①得 $x-a=r\cdot\cos\theta \cdots ③$

由②得 $y-b=r\cdot\sin\theta \cdots ④$

由 $③^2+④^2$ 得 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\cdot\cos^2\theta+r^2\cdot\sin^2\theta$

$=r^2\cdot(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=r^2$

$\therefore (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

例 3、在平面直角坐标系中，$P(x, y)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 上动点，则 $S=x+y$ 的最大值是____.

$\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的参数方程 $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$（$\theta$ 为参数）

① 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=a\cdot\cos\theta \\ y=b\cdot\sin\theta \end{cases}$（$\theta$ 为参数）

$\Downarrow$

$\frac{x}{a}=\cos\theta \cdots ③$

$\frac{y}{b}=\sin\theta \cdots ④$

② 圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=a+r\cos\theta \\ y=b+r\sin\theta \end{cases}$（$\theta$ 为参数）

由 $③^2+④^2$ 得 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

即 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

辅助角公式：$y=a\sin\theta+b\cdot\cos\theta$

$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\varphi)$

$P(x,y)$

$\Downarrow$

$P(\sqrt{2}\cos\theta, \sin\theta)$

$\therefore S=x+y=\sqrt{2}\cos\theta+\sin\theta$

$=\sin\theta+\sqrt{2}\cos\theta$

$=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2}\sin(\theta+\varphi)$

$=\sqrt{3}\sin(\theta+\varphi)$

当 $\sin(\theta+\varphi)=1$ 时，则 $S_{max}=\sqrt{3}$

变式 3:（1）设 $a,b\in R$ ，$a^2+2b^2=6$，求 $a+\sqrt{2}b$ 的最大值和最小值，并求取得最值时 a、b 的值.

x,y　　$x^2+2y^2=6$　　$x+\sqrt{2}y$

椭圆 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ ∴参数方程 $\begin{cases} x=a\cos\theta=\sqrt{6}\cos\theta \\ y=b\sin\theta=\sqrt{3}\sin\theta \end{cases}$ (θ为参数)

令 $Z=x+\sqrt{2}y=\sqrt{6}\cos\theta+\sqrt{6}\sin\theta=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right)=2\sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

当 $\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=1$ 时，即 $\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，$Z_{max}=2\sqrt{3}$ $\Rightarrow\begin{cases} x=\sqrt{6}\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}$

$y=a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\varphi)$

当 $\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=-1$ 时，即 $\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$，即 $\theta=\frac{5\pi}{4}$ 时，$Z_{min}=-2\sqrt{3}$

∴ $\begin{cases} x=\sqrt{6}\cos\frac{5\pi}{4}= \_\_\_ \\ y=\sqrt{3}\sin\frac{5\pi}{4}= \_\_\_ \end{cases}$

（2）设 P、Q 分别为圆 C：$x^2+(y-6)^2=2$ 和椭圆 $\frac{x^2}{10}+y^2=1$ 的点，求 P、Q 两点间的最大距 离.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ∴参数方程 $\begin{cases} x=a\cdot\cos\theta \\ y=b\cdot\sin\theta \end{cases}$ (θ为参数)　　$\begin{cases} x=\sqrt{10}\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$ (θ为参数)

设 $Q(\sqrt{10}\cos\theta,\sin\theta)$，$C(0,6)$

∴ $|CQ|_{max}=\sqrt{(\sqrt{10}\cos\theta)^2+(\sin\theta-6)^2}$　　∴ $|PQ|_{max}=|CQ|_{max}+r$

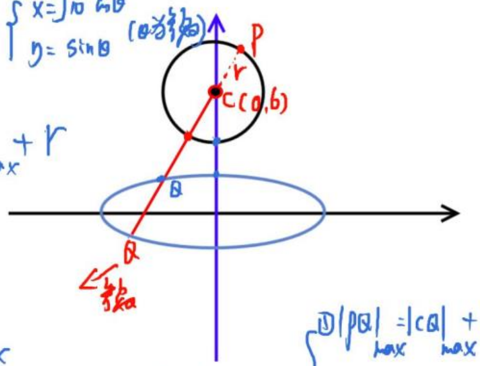
$=\sqrt{-9\sin^2\theta-12\sin\theta+46}$

$t=-9\sin^2\theta-12\sin\theta+46 \Longleftrightarrow t_{max}$

设 $m=\sin\theta\in[-1,1]$

∴ $t=-9m^2-12m+46$

$m=-\frac{b}{2a}=-\frac{-12}{-18}=\frac{2}{3}=\sin\theta$



$|PQ|=|CQ|\pm r$ 最值 ??

$\begin{cases} ① |PQ|_{max}=|CQ|_{max}+r \\ ② |PQ|_{min}=|CQ|_{min}-r \end{cases}$

（2）设 P、Q 分别为圆 C：$x^2+(y-6)^2=2$ 和椭圆 $\frac{x^2}{10}+y^2=1$ 的点，求 P、Q 两点间的最大距 离.