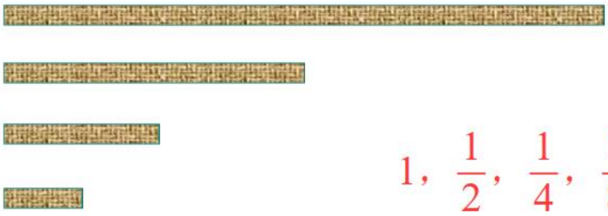
4.1 数列的概念

实例1：《庄子·天下篇》

一尺之棰，日取其半，万世不竭。



$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \cdots;$

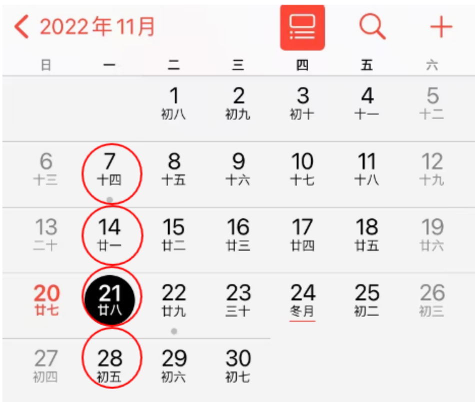
实例2：

同学们，今天星期几？ **星期一**

这个月星期二分别是几号？

7号，14号，21号，28号

可以得到数列：7，14，21，28



实例3：传说古希腊毕达哥拉斯学派的数学家们经常在沙滩上研究数学问题，他们在沙滩上画点或用小石子来表示数.

比如他们研究过1, 3, 6, 10， ⋯.

由于这些数都能够表示成三角形，他们就将其称为三角形数.

类似地，1, 4, 9, 16， ⋯等被称为正方形数.

有人说，大自然是懂数学的.




树木的分杈、花瓣的数量、植物种子的排列……都遵循了某种数学规律.

斐波拉契数

$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,\cdots.$

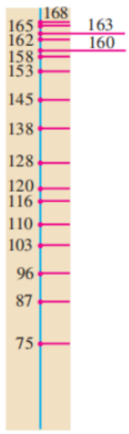
(1) $1，\frac{1}{2}，\frac{1}{4}，\frac{1}{8}，\cdots$； (2) 7，14，21，28…； (3) 1，3, 6, 10…；

(4) 1，4，9，16…； (5) 1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，$\cdots$.

(教材P2) 王芳从 1 岁到 17 岁，每年生日那天测量身高.

将这些身高数据（单位：cm）依次排成一列数：

75，87，96，103，110，116，120，128，138，
145，153，158，160，162，163，165，168.　　①



记王芳第 i 岁时的身高为 h_i，那么 $h_1=$　，$h_2=$　，…，$h_{17}=168$. 我们发现，h_i 中的 i 反映了身高按岁数从 1 到 17 的顺序排列时的确定位置，即 $h_1=75$ 是排在第 1 位的数，$h_2=87$ 是排在第 2 位的数……$h_{17}=168$ 是排在第 17 位的数，它们之间不能交换位置. 所以，①是具有确定顺序的一列数.

$1，\frac{1}{2}，\frac{1}{4}，\frac{1}{8}，\cdots$；

项：a_1　a_2　a_3　a_4　……　a_n

第一项　第二项　第三项　第四项　第 n 项

一、数列的概念

有序的　不止一个数

一般地，我们把按照$\boxed{\text{确定的顺序排列}}$的$\boxed{\text{一列数}}$称为**数列**(sequence of number)，数列中的每一个数叫做这个数列的**项**. 数列的第一个位置上的数叫做这个数列的第 1 项，常用符号 a_1 表示，第二个位置上的数叫做这个数列的第 2 项，用 a_2 表示……第 n 个位置上的数叫做这个数列的第 n 项，用 a_n 表示. 其中第 1 项也叫做**首项**.

数列的一般形式是

$$a_1，a_2，\cdots，a_n，\cdots，$$

简记为 $\{a_n\}$. → 数列

由于数列 $\{a_n\}$ 中的每一项 a_n 和它的序号 n 有下面的对应关系：

序号	1	2	3	…	n	…
	↓	↓	↓		↓	
项	a_1	a_2	a_3	…	a_n	…

首项　通项

数列 $\{a_n\}$ 是从正整数集 N^*（或它的有限子集 $\{1，2，\cdots，n\}$）到实数集 R 的**函数**，其**自变量**是序号 n，对应的**函数值**是数列的第 n 项 a_n，记为 $a_n=f(n)$.

一、数列的概念

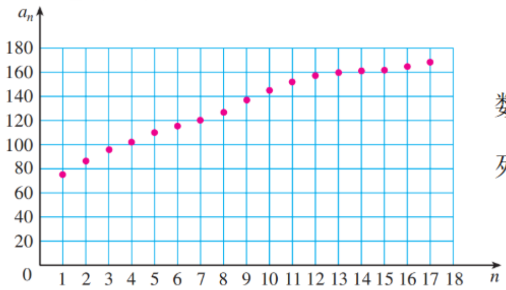
数列 $\{a_n\}$ 是从正整数集 N^*（或它的有限子集 $\{1, 2, \cdots, n\}$）到实数集 R 的**函数**，其**自变量**是序号 $\boldsymbol{n}$，对应的**函数值**是数列的第 n 项 $\boldsymbol{a_n}$，记为 $a_n=f(n)$.

与其他函数一样，数列也可以用表格和图象来表示. 例如，数列①可以表示为表 4.1-1.

表 4.1-1

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
a_n	75	87	96	103	110	116	120	128	138	145	153	158	160	162	163	165	168

它的图象如图 4.1-1 所示.



与函数类似，我们可以定义**数列的单调性**.

从第 2 项起，每一项都大于它的前一项的数列叫做**递增数列**；

从第 2 项起，每一项都小于它的前一项的数列叫做**递减数列**.

特别地，各项都相等的数列叫做**常数列**.

一、数列的概念

数列 $\{a_n\}$ 是从正整数集 N^*（或它的有限子集 $\{1, 2, \cdots, n\}$）到实数集 R 的**函数**，其**自变量**是序号 $\boldsymbol{n}$，对应的**函数值**是数列的第 n 项 $\boldsymbol{a_n}$，记为 $a_n=f(n)$.

与函数类似，我们可以定义**数列的单调性**.

从第 2 项起，每一项都**大于**它的**前一项**的数列叫做**递增数列**；

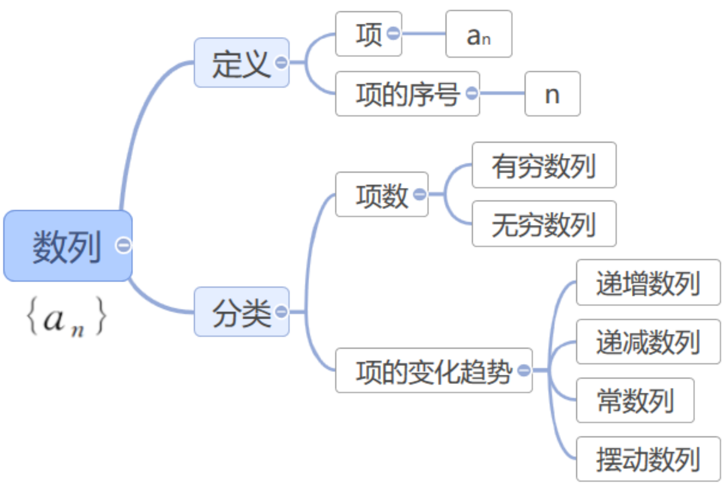
从第 2 项起，每一项都**小于**它的**前一项**的数列叫做**递减数列**.

特别地，**各项都相等**的数列叫做**常数列**.

数列　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　通项公式

如果数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与它的序号 n 之间的对应关系可以用一个式子来表示，那么这个式子叫做这个数列的**通项公式**. 例如数列③的通项公式为 $a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$. 显然，通项公式就是数列的函数解析式，根据通项公式可以写出数列的各项.

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots$;　　　　　　$1, 4, 9, 16\ldots$



例 1 根据下列数列$\{a_n\}$的通项公式，写出数列的前 5 项，并画出它们的图象.

(1) $a_n=\dfrac{n^2+n}{2}$； (2) $a_n=\cos\dfrac{(n-1)\pi}{2}$.

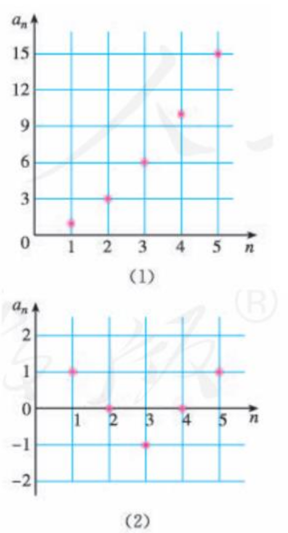
解：(1) 当通项公式中的$n=1$，2，3，4，5 时，数列$\{a_n\}$的前 5 项依次为

1，3，6，10，15.

(2) 当通项公式中的$n=1$，2，3，4，5 时，数列$\{a_n\}$的前 5 项依次为

1，0，-1，0，1.

图象如图 4.1-2(2) 所示.



例 2 根据下列数列的前 4 项，写出数列的一个通项公式：

(1) 1，$-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$-\frac{1}{4}$，…；

(2) 2，0，2，0，….

解：(1) 这个数列的前 4 项的绝对值都是序号的倒数，并且奇数项为正，偶数项为负，所以它的一个通项公式为

$$a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}❶.$$

(2) 这个数列前 4 项的奇数项是 2，偶数项是 0，所以它的一个通项公式为

$$a_n=(-1)^{n+1}+1.$$

练习

4. 根据下列数列的前 5 项，写出数列的一个通项公式：

(1) 1，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{7}$，$\frac{1}{9}$，…； $a_n=\frac{1}{2n-1}$

(2) 1，$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{\sqrt{2}}{4}$，$\frac{1}{4}$，…. $a_n=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$

例 3 如果数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=n^2+2n$，那么 120 是不是这个数列的项？如果是，是第几项？

解：令

$$n^2+2n=120,$$

解这个关于 n 的方程，得

$$n=-12\ (舍去)，或\ n=10.$$

所以，120 是数列$\{a_n\}$的项，是第 10 项.

例 4 图 4.1-3 中的一系列三角形图案称为谢尔宾斯基三角形．在图中 4 个大三角形中，着色的三角形的个数依次构成一个数列的前 4 项，写出这个数列的一个通项公式.

(1)　(2)　(3)　(4)

解：在图 4.1-3 (1) (2) (3) (4) 中，着色三角形的个数依次为

$$1，3，9，27，$$

即所求数列的前 4 项都是 3 的指数幂，指数为序号减 1.

因此，这个数列的一个通项公式是

$$a_n=3^{n-1}.$$

练习

1. 根据下面的图形及相应的点数，写出点数构成的数列的一个通项公式，并在横线上和括号中分别填上第 5 项的图形和点数.

(1)

1　6　11　16

21 ______ ( )； $a_n=5n-4$

(2)

1　4　7　10

13 ______ ( )； $a_n=3n-2$

(3)

3　8　15　24

35 ______ ( ). $a_n=n^2+2n$

1.数列$\sqrt{3},3,3\sqrt{3},9,\ldots$的一个通项公式是　　(　　)

A.$a_n=\sqrt{3n}(n\in N^*)$

B.$a_n=\sqrt{3^n}(n\in N^*)$

C.$a_n=\sqrt{3(n+1)}\ (n\in N^*)$

D.$a_n=\sqrt{3^{n+1}}\ (n\in N^*)$

【解析】选B.由前四项统一形式为$\sqrt{3},\sqrt{9},\sqrt{27},\sqrt{81}$,则它的一个通项公式为 $a_n=\sqrt{3^n}(n\in N^*)$.

2.已知数列9,99,999,9 999,…,写出$\{a_n\}$的一个通项公式(　　)

A.$a_n=10^{n-1}$　　B.$a_n=10^{n-2}$

C.$a_n=10^n-1$　　D.$a_n=10^n+1$

【解析】选C.数列9,99,999,9 999,…,可表示为$10-1,10^2-1,10^3-1,10^4-1,\ldots$,所以$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=10^n-1$.

3.数列$1,-\frac{1}{3},\frac{1}{5},-\frac{1}{7},\frac{1}{9},\ldots$的一个通项公式$a_n=$(　　)

A.$\frac{(-1)^n}{2n-1}$　　B.$\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$　　C.$\frac{(-1)^n}{2n+1}$　　D.$\frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}$

【解析】选B. $a_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}$.

4. 已知数列$\{a_n\}$的前4项为11,102,1 003,10 004,则它的一个通项公式为

______.

【解析】由于$11=10+1,102=10^2+2,1\ 003=10^3+3,10\ 004=10^4+4,\ldots$,所以数列$\{a_n\}$的一个通项公式为$a_n=10^n+n$.

答案:$a_n=10^n+n$

二、数列的递推公式

像 $\begin{cases} a_1=1, & (n=1) \\ a_n=3a_{n-1}, & (n\geqslant 2) \end{cases}$ 这样，如果一个数列的相邻两项或多项之间的关系可以用一个式子来表示，

那么这个式子叫做这个数列的递推公式．知道了首项和递推公式，就能求出数列的每一项了．

由初始值和相邻几项的递推关系确定的

数列的表示方法:

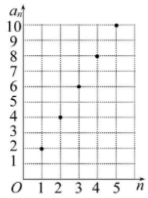
数列的表示方法有通项公式法、图象法、列表法、递推公式法, 以数列2, 4, 6, 8, 10, 12, …为例, 表示如下: ①通项公式法: $a_n=2n$.

②递推公式法: $\begin{cases} a_1=2, \\ a_{n+1}=a_n+2, n\in\mathbf{N}^*. \end{cases}$

③列表法:

n	1	2	3	…	k	…
a_n	2	4	6	…	2k	…

④图象法:



例 5 已知数列$\{a_n\}$的首项为$a_1=1$，递推公式为$a_n=1+\dfrac{1}{a_{n-1}}$ $(n\geqslant 2)$，写出这个数列的前 5 项.

解： 由题意可知 $a_1=1$，

$$a_2=1+\frac{1}{a_1}=1+\frac{1}{1}=2,$$

$$a_3=1+\frac{1}{a_2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$

$$a_4=1+\frac{1}{a_3}=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3},$$

$$a_5=1+\frac{1}{a_4}=1+\frac{3}{5}=\frac{8}{5}.$$

练习

2. 根据下列条件，写出数列$\{a_n\}$的前 5 项：

(1) $a_1=1$，$a_n=a_{n-1}+2^{n-1}$ $(n\geqslant 2)$； (1) 1, 3, 7, 15, 31

(2) $a_1=3$，$a_n=\dfrac{2}{3}a_{n-1}+1$ $(n\geqslant 2)$. (2) 3, 3, 3, 3, 3

3. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，$a_n=2-\dfrac{1}{a_{n-1}}$ $(n\geqslant 2)$，写出它的前 5 项，并猜想它的通项公式.

2, $\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{4}{3}$, $\dfrac{5}{4}$, $\dfrac{6}{5}$ $\qquad a_n=\dfrac{n+1}{n}$

由递推公式求通项公式

【典例】1.在数列$\{a_n\}$中,$a_1=2$,$2a_{n+1}=2a_n+n$,则a_9等于（　　）

A.20　　B.30　　C.36　　D.28

$\boxed{a_{n+1}-a_n=f(n)}$ ⇨ 累加法

【解析】选A.因为$a_1=2$,$2a_{n+1}=2a_n+n$，所以$a_{n+1}-a_n=\frac{n}{2}$,所以$a_9=(a_9-a_8)+(a_8-a_7)+\dots+(a_2-a_1)+a_1$,

所以$a_9=\frac{8}{2}+\frac{7}{2}+\dots+\frac{1}{2}+2=\frac{1+2+\dots+7+8}{2}+2=20$.

$\boxed{a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\dots+(a_n-a_{n-1})\ n\geq 2}$

2.设数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,$a_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)a_{n-1}(n\geq 2)$,求通项公式$a_n$.

【解析】因为$a_1=1$,$a_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)a_{n-1}(n\geq 2)$，则$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n}$, ⇨ $\boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)}$ ⇨ 累乘法

则 $\boxed{a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\times\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}}\times\cdots\times\frac{a_3}{a_2}\times\frac{a_2}{a_1}\times a_1}$

$$=\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}\times\frac{n-3}{n-2}\times\cdots\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{n}$$

又因为$n=1$时,$a_1=1$,符合上式,所以$a_n=\frac{1}{n}(n\in\mathbb{N}^*)$.

3.已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{1}{2}$,$a_na_{n-1}=a_{n-1}-a_n(n\geq 2)$,求数列$\{a_n\}$的通项公式.

【解析】因为$a_na_{n-1}=a_{n-1}-a_n$,所以$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}=1$. ⇨ $\boxed{a_{n+1}-a_n=f(n)}$ ⇨ 累加法

$\boxed{a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\dots+(a_n-a_{n-1})\ n\geq 2}$

所以$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_2}\right)+\dots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}\right)=2+\underbrace{1+1+\dots+1}_{(n-1)个1}=n+1$.

所以$\frac{1}{a_n}=n+1(n\geq 2)$,

又$a_1=\frac{1}{2}$也适合上式,所以$a_n=\frac{1}{n+1}$.

数列通项公式的常见求法

1、累加法：形如 $a_{n+1}=a_n+f(n)$.

变形为 $a_{n+1}-a_n=f(n)$，用累加法求解. 即：$a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\dots+(a_n-a_{n-1})\ n\geq 2$

2、累乘法：形如 $a_{n+1}=a_n\cdot f(n)$.

变形为$\frac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$，用累乘法求解. 即：$a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1$. $n\geq 2$

三、数列的前n项和公式

我们把数列 $\{a_n\}$ 从第 1 项起到第n项止的各项之和，称为数列 $\{a_n\}$ 的前n项和，记作S_n，即：

$$\boxed{S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n}$$

如果数列 $\{a_n\}$ 的前n项和S_n与它的序号n之间的对应关系可以用一个式子来表示，那么这个式子叫做这个数列的前n项和公式.

如数列：2，2，2，2……　则$S_n=$

显然 $S_1=a_1$，而 $S_{n-1}=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}$（$n\geqslant 2$），

于是我们有 $\boxed{a_n=\begin{cases}S_1, & n=1,\\ S_n-S_{n-1}, & n\geqslant 2.\end{cases}}$ ⟵ a_n与S_n的关系

公式法

公式法：已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 或给定 S_n 与 a_n 的关系 $f(S_n, a_n)=0$

【解题策略】

由前n项和求通项公式的步骤

(1)先利用$a_1=S_1$,求出a_1;

(2)用n-1($n\geq2$)替换S_n中的n得到一个新的关系S_{n-1},利用$a_n=S_n-S_{n-1}(n\geq2)$便可求出当$n\geq2$时a_n的解析式;

(3)注意检验n=1时的值是否符合$n\geq2$时a_n的解析式,若符合,则合并;若不符合,则用分段函数表示通项公式a_n.

三、数列的前n项和公式：$\boxed{S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n}$

a_n与S_n的关系：$\boxed{a_n=\begin{cases}S_1, & n=1,\\ S_n-S_{n-1}, & n\geqslant 2.\end{cases}}$

思考

变式：改为“$S_n=n^2+n+1$”呢？

已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和公式为 $S_n=n^2+n$，你能求出$\{a_n\}$的通项公式吗？

因为

$$a_1=S_1=2,$$

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=n^2+n-[(n-1)^2+(n-1)]\\&=2n\ (n\geqslant 2),\end{aligned}$$

并且当 $n=1$ 时，$a_1=2\times1=2$ 依然成立.

所以$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n=2n$.

练习

4. 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和公式为 $S_n=-2n^2$，求$\{a_n\}$的通项公式.

【加固训练】

1.(2022 荆州高二检测)在数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+1}$$(n\in\mathrm{N}^*)$,则$a_{10}=$

____________.

【解析】由已知$a_{10}=\frac{a_{10}}{a_9}\cdot\frac{a_9}{a_8}\cdot\ldots\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1=\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\ldots\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{10}$.

答案:$\frac{1}{10}$

由前n项和求通项公式

【典例】1.(2022 北师大附中高二检测)数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=3n^2$,则

$a_n=$____________.

【解析】①当$n=1$时,$a_1=S_1=3$,

②当$n\geq2$时$S_{n-1}=3(n-1)^2=3n^2-6n+3$,

$a_n=S_n-S_{n-1}=6n-3$,当$n=1$时上式也符合,

所以$a_n=6n-3$.

答案:$6n-3$

2.已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=2n^2+n-5$,那么它的通项公式是____________.

【解析】①当$n=1$时,$a_1=S_1=2+1-5=-2$;

②当$n\geq2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=(2n^2+n-5)-[2(n-1)^2+(n-1)-5]=4n-1$,

当$n=1$时,$4n-1=4-1=3\neq-2$,

综上,$a_n=\begin{cases}-2, n=1,\\4n-1, n\geq2.\end{cases}$

答案:$a_n=\begin{cases}-2, n=1,\\4n-1, n\geq2\end{cases}$

【跟踪训练】

1.已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=n^2+1$,则$a_1+a_5=$__________.

【解析】由$S_n=n^2+1$得$a_1=1^2+1=2$,$a_5=S_5-S_4=(5^2+1)-(4^2+1)=9$,故$a_1+a_5=2+9=11$.

答案:11

2.已知数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=n^2-2n+2$,则数列$\{a_n\}$的通项公式为

__________.

【解析】$a_n=\begin{cases} S_1,n=1 \\ S_n-S_{n-1},n\geq 2 \end{cases}$,而$S_1=1-2+2=1$,

当$n\geq 2$时,$S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2-2=2n-3$,

故$a_n=\begin{cases} 1,n=1, \\ 2n-3,n\geq 2. \end{cases}$