等差数列的概念

主题1　等差数列的概念

1．观察下面几个数列，每个数列从第2项起每一项与前一项的差满足什么条件？

(1)2，4，6，8，10，12，…；

(2)1，1，1，1，1，1，…；

(3)1，3，5，7，9，11，….

提示：每个数列从第2项起每一项与前一项的差都等于同一个常数．

2．若满足上述条件的数列我们称之为等差数列，试判断满足$2A=a+b$的三个数a，A，b是否成等差数列．

提示：因为$2A=a+b$，所以$A-a=b-A$，故a，A，b成等差数列．

结论：

1．等差数列

(1)定义：一般地，如果一个数列从第2项起，每一项与它的前一项的差都等于**同一个常数**，那么这个数列就叫做等差数列．

(2)公差：这个**常数**叫做等差数列的公差，通常用字母**d**表示．

2．等差中项

由三个数a，A，b组成的等差数列可以看成是最简单的等差数列，这时，A叫做a与b的等差中项，根据等差数列的定义可以知道$2A=$ **$a+b$**．

对点练

1．已知$a=1$，$b=3$，则a，b的等差中项为(　　)

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【解析】选B.$\frac{a+b}{2}=\frac{1+3}{2}=2$.

2．下列数列不是等差数列的是(　　)

A．1，1，1，1，1　　　　B．4，7，10，13，16

C．$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，1，$\frac{4}{3}$，$\frac{5}{3}$　　　　D．-3，-2，-1，1，2

【解析】选D.由等差数列的定义得A.$d=0$，故正确；B.$d=3$，故正确；C.$d=\frac{1}{3}$，故正确；D.每一项与前一项的差不是同一个常数，故错误．

3．$\lg(\sqrt{3}-\sqrt{2})$与$\lg(\sqrt{3}+\sqrt{2})$的等差中项是________．

【解析】等差中项$A=\frac{\lg(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\lg(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{2}=\frac{\lg 1}{2}=0$.

答案：0

主题2　等差数列的通项公式

1．由等差数列的定义知$a_2=a_1+d$，$a_3=a_2+d=a_1+2d$，$a_4=a_3+d=a_1+3d$……

由此你能写出a_n与a_1，n，d的关系式吗？　提示：$a_n=a_1+(n-1)d$.

2．除了上述方法外，你还能用其他方法推导等差数列的通项公式吗？

$$\left.\begin{array}{c} a_2-a_1=d \\ a_3-a_2=d \\ a_4-a_3=d \\ \cdots \\ a_n-a_{n-1}=d \end{array}\right\}(n-1)个$$

将以上$(n-1)$个等式两边分别相加，可得$a_n-a_1=(n-1)d$，即$a_n=a_1+(n-1)d$.

结论：

等差数列的通项公式

(1)条件：等差数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公差为d.

(2)通项公式：**$a_n=a_1+(n-1)d$**.

对点练

1．在等差数列$\{a_n\}$中，$a_3=7$，$a_5=a_2+6$，则$a_6=$(　　)

A．11　　B．12　　C．13　　D．14

【解析】选C.设公差为d，由题意，得$\begin{cases}a_1+2d=7,\\ a_1+d+6=a_1+4d,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=3,\\ d=2.\end{cases}$所以$a_6=a_1+5d=3+5\times2=13$.

2．已知等差数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=3-4n$，则数列$\{a_n\}$的首项与公差分别是（　　）

A．1，4　　B．-1，-4　　C．4，1　　D．-4，-1

【解析】选B.当$n=1$时，$a_1=-1$，当$n=2$时，$a_2=3-4\times2=-5$，所以公差$d=a_2-a_1=-4$.

3．等差数列$\{a_n\}$中，首项$a_1=3$，公差$d=3$，若$a_n=2\,016$，则$n=$________.

【解析】由题意知，$a_n=a_1+(n-1)d=3+3(n-1)=2\,016$，解得$n=672$.

探究点一　等差数列的判定与证明

【典例1】 已知数列$\{a_n\}$，满足$a_1=2$，$a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+2}$. (1)数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是否为等差数列？说明理由；(2)求$a_n$.

【思维导引】 (1)要判断数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是否为等差数列，要先求$\boxed{\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}}$的表达式.

(2)先求出数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$的通项公式，再求$a_n$.

【解析】 (1)数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是等差数列，理由如下：因为$a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+2}$，所以$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+2}{2a_n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{a_n}$，

所以$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2}$，即$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是首项$\frac{1}{a_1}=\frac{1}{2}$，公差$d=\frac{1}{2}$的等差数列.

(2)由(1)可知$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+(n-1)d=\frac{n}{2}$，所以$a_n=\frac{2}{n}$.

变式： 已知数列$\{a_n\}$，满足$a_1=4$，$a_n=4-\frac{4}{a_{n-1}}$ $(n>1)$，记$b_n=\frac{1}{a_n-2}$

(1)试证明数列$\{b_n\}$为等差数列；(2)求数列$\{a_n\}$的通项公式.

【解析】 (1)$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{a_{n+1}-2}-\frac{1}{a_n-2}=\frac{1}{\left(4-\frac{4}{a_n}\right)-2}-\frac{1}{a_n-2}=\frac{a_n}{2(a_n-2)}-\frac{1}{a_n-2}=\frac{a_n-2}{2(a_n-2)}=\frac{1}{2}$.

又$b_1=\frac{1}{a_1-2}=\frac{1}{2}$，所以数列$\{b_n\}$是首项为$\frac{1}{2}$，公差为$\frac{1}{2}$的等差数列.

(2)由(1)知$b_n=\frac{1}{2}+(n-1)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}n$. 因为$b_n=\frac{1}{a_n-2}$，所以$a_n=\frac{1}{b_n}+2=\frac{2}{n}+2$，

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{2}{n}+2$.

【类题通法】 等差数列的判定方法有以下三种

(1)定义法：$a_{n+1}-a_n=d$(常数)$(n\in\mathbf{N}^*)\Leftrightarrow\{a_n\}$为等差数列；

(2)等差中项法：$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}(n\in\mathbf{N}^*)\Leftrightarrow\{a_n\}$为等差数列；

(3)通项公式法：$a_n=an+b$(a，b是常数，$n\in\mathbf{N}^*$)$\Leftrightarrow\{a_n\}$为等差数列. 如果要证明一个数列是等差数列，则必须用定义法或等差中项法.

探究点二　等差中项及其应用

【典例2】(1)若$a=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，$b=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$，则a，b的等差中项为(　　)

A．$\sqrt{3}$　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2)在－1与7之间顺次插入三个数a，b，c，使这五个数成等差数列，求此数列．

【解析】(1)选A.由题意，$a=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，

$b=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，所以$a+b=\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}=2\sqrt{3}$．

则a，b的等差中项为$\frac{a+b}{2}=\sqrt{3}$．

(2)因为－1，a，b，c，7成等差数列，所以b是－1与7的等差中项，则$b=\frac{-1+7}{2}=3$，

又a是－1与3的等差中项，所以$a=\frac{-1+3}{2}=1$.

又c是3与7的等差中项，所以$c=\frac{3+7}{2}=5$.

所以该数列为－1，1，3，5，7.

【类题通法】等差中项的求法及应注意的两个问题

(1)求法：已知实数a，b，求a，b的等差中项A，只需求出a与b的算术平均数即可，即$A=\frac{a+b}{2}$．

(2)注意：

①唯一性：任意两个常数存在唯一的等差中项；

②任意性：等差数列中不连续的三项，如a_{k-s}，a_k，a_{k+s}，a_k是a_{k-s}与a_{k+s}的等差中项，

因为其下标k－s，k，k＋s成等差数列．

提醒：等差数列中项的下标成等差数列，相应项也成等差数列．

定向训练

已知数列8，a，2，b，c是等差数列，则a，b，c的值分别为________，________，________．

【解析】因为8，a，2，b，c是等差数列，所以$\begin{cases}8+2=2a,\\a+b=2\times2,\\2+c=2b.\end{cases}$解得$\begin{cases}a=5,\\b=-1,\\c=-4.\end{cases}$

探究点三　等差数列通项公式的求法及应用

命题角度1　基本量a_1，d的计算

【典例3】 在等差数列$\{a_n\}$中，已知$a_6 = 12$，$a_{18} = 36$，求通项公式a_n.

【解析】 由题意可得$\begin{cases} a_1 + 5d = 12, \\ a_1 + 17d = 36. \end{cases}$ 解得$d = 2$，$a_1 = 2$.所以$a_n = 2 + (n - 1)\times 2 = 2n$.

定向训练

(1)求等差数列8，5，2，…的第20项；

(2)判断-401是不是等差数列-5，-9，-13，…的项，如果是，是第几项?

【解析】 (1)由$a_1 = 8$，$a_2 = 5$，得$d = a_2 - a_1 = 5 - 8 = -3$，由$n = 20$，得$a_{20} = 8 + (20 - 1)\times(-3) = -49$.

(2)由$a_1 = -5$，$d = -9$ 由题意，令$-401 = -4n - 1$，得$n = 100$，$\cdot 1)\times(-4) = -4n - 1$.

由题意，令$-401 = -4n - 1$，得$n = 100$，即-401是这个数列的第100项.

课堂小结

- 等差数列
  - 知识深化
    - a，A，b成等差数列，等价于A是a和b的等差中项，等价于$2A=a+b$
    - 要求通项公式，只需知道首项和公差
  - 方法总结
    - 用通项公式可以求出首项和公差
    - 用通项公式可以求出数列的任意一项
    - 用通项公式可以判断某数是不是数列中的项，如果是，可求出是第几项

等差数列的性质

主题1　等差数列的性质

1．已知等差数列$\{a_n\}$，数列中的任意两项a_n，a_m存在怎样的关系?

提示：由等差数列的通项公式可知 $a_n=a_1+(n-1)d$，$a_m=a_1+(m-1)d$，

两式相减，得$a_n-a_m=(n-m)d$，所以$\boxed{a_n=a_m+(n-m)d.}$

2．观察等差数列$\{a_n\}$的序号与项，回答问题：

序号	1	2	3	4	5	6 ⋯ n
	↓	↓	↓	↓	↓	↓
项	3	6	9	12	15	18 ⋯ $3n$

(1)$3+6=4+5$，a_3+a_6与a_4+a_5相等吗?　提示：相等.

(2)若$m+n=p+q(m，n，p，q\in N^*)$，则$a_m+a_n=a_p+a_q$吗?

提示：相等．因为$a_m=3m$，$a_n=3n$，$a_p=3p$，$a_q=3q$，

所以$a_m+a_n=3(m+n)$，$a_p+a_q=3(p+q)$，

$\boxed{因为m+n=p+q，故a_m+a_n=a_p+a_q.}$

3．问题2中等差数列若换为一般的等差数列，等式还成立吗?对于任意的正整数 m，n，p，q，

若$m+n=p+q$，则在等差数列$\{a_n\}$中，a_m+a_n与a_p+a_q之间有怎样 的关系?为什么?

提示：$a_m+a_n=a_p+a_q$.因为$a_m+a_n=a_1+(m-1)d+a_1+(n-1)d=2a_1+(n+m-2)d$，

而$a_p+a_q=a_1+(p-1)d+a_1+(q-1)d=2a_1+(p+q-2)d$，又因为$m+n=p+q$，所以$a_m+a_n=a_p+a_q$.

结论：

等差数列的性质：$\{a_n\}$是公差为d的等差数列，

(1)若正整数m，n，p，q满足$m+n=p+q$，则$a_m+a_n=$ $\underline{a_p+a_q}$.

(2)$a_n=a_m+$ $\underline{(n-m)d}$.

对点练

1．等差数列$\{a_n\}$中，$a_1+a_5=10$，$a_4=7$，则数列$\{a_n\}$的公差为(　　)

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【解析】选B.由题知$a_1+a_5=10$，所以$a_3=5$，又$a_4=7$，所以公差$d=a_4-a_3=2$.

2．在等差数列$\{a_n\}$中，若$a_2=1$，$a_6=-1$，则$a_4=$(　　)

A．-1　　B．1　　C．0　　D．$-\frac{1}{2}$

【解析】选C.$2a_4=a_6+a_2=-1+1=0$，所以$a_4=0$.

3．等差数列$\{a_n\}$中，已知$a_{100}=120$，$a_{90}=100$，则公差$d=$______.

【解析】由等差数列的性质知$d=\dfrac{a_{100}-a_{90}}{100-90}=2$.

主题2　由等差数列衍生的新数列

若$\{a_n\}$是公差为d的等差数列，那么$\{a_n+a_{n+2}\}$是等差数列吗？若是，公差是多少？

提示：因为$(a_{n+1}+a_{n+3})-(a_n+a_{n+2})=(a_{n+1}-a_n)+(a_{n+3}-a_{n+2})=d+d=2d$，所以 $\{a_n+a_{n+2}\}$是公差为2d的等差数列．

结论：

若$\{a_n\}$，$\{b_n\}$分别是公差为d，d′的等差数列，则有

数列	结论
$\{c+a_n\}$	公差为d的等差数列(c为任一常数)
$\{c\ a_n\}$	公差为cd的等差数列(c为任一常数)
$\{a_n+a_{n+k}\}$	公差为2d的等差数列(k为常数，$k\in\mathbf{N}^*$)
$\{pa_n+qb_n\}$	公差为pd＋qd′的等差数列(p，q为常数)

对点练

下面是关于公差是$d(d>0)$的等差数列$\{a_n\}$的四个说法：

p_1：数列$\{a_n\}$是递增数列；p_2：数列$\{na_n\}$是递增数列；

p_3：数列$\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$是递增数列；$p_4$：数列$\{a_n+3nd\}$是递增数列．其中正确的是(　　)

A．p_1，p_2　　B．p_3，p_4　C．p_2，p_3　　D．p_1，p_4

【解析】选D.对于p_1：$a_n=a_1+(n-1)d$，$d>0$，所以$a_n-a_{n-1}=d>0$，则p_1正确；

对于p_2：$na_n=na_1+n(n-1)d$，所以$na_n-(n-1)a_{n-1}=a_1+2(n-1)d$与0的大小关系和$a_1$的取值情况有关．

故数列$\{na_n\}$不一定递增，则p_2不正确；

对于p_3：$\frac{a_n}{n}=\frac{a_1}{n}+\frac{n-1}{n}d$，所以$\frac{a_n}{n}-\frac{a_{n-1}}{n-1}=\frac{-a_1+d}{n(n-1)}$，当$d-a_1>0$，即$d>a_1$时，数列$\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$是递增数列，

但$d>a_1$不一定成立，则p_3不正确；

对于p_4：设$b_n=a_n+3nd$，则$b_{n+1}-b_n=a_{n+1}-a_n+3d=4d>0$.所以数列$\{a_n+3nd\}$是递增数列，$p_4$正确．

探究点一　等差数列的性质及应用

【典例1】(1)已知a_3与a_7是方程$x^2-8x+9=0$的两根，则$a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=$ ________.

(2)已知等差数列$\{a_n\}$中$a_5+a_6+a_7=15$，$a_5\ a_6\ a_7=45$，求$\{a_n\}$的通项公式．

【解析】(1)因为a_3与a_7是方程$x^2-8x+9=0$的两根，所以$a_3+a_7=8$，故$a_4+a_6=8$，$a_5=\frac{1}{2}(a_3+a_7)=4$.

因此原式$=(a_3+a_7)+(a_4+a_6)+a_5=8+8+4=20$.

(2)因为$a_5+a_6+a_7=3a_6=15$，所以$a_6=5$，因此$\begin{cases}a_5+a_7=10,\\a_5\ a_7=9,\end{cases}$　解得$\begin{cases}a_5=1,\\a_7=9\end{cases}$　或$\begin{cases}a_5=9,\\a_7=1.\end{cases}$

若$a_5=1$，$a_7=9$，则$d=\frac{a_7-a_5}{7-5}=\frac{9-1}{2}=4$，$a_n=a_5+(n-5)\times4=4n-19$；

若$a_5=9$，$a_7=1$，则$d=\frac{a_7-a_5}{7-5}=-4$，$a_n=a_5+(n-5)\times(-4)=-4n+29$.

【类题通法】等差数列运算的常用思路

(1)根据已知条件，列出关于a_1，d的方程(组)，确定a_1，d，然后求其他量．

(2)利用性质巧解，观察等差数列中项的序号，若满足$m+n=p+q=2r(m，n，p，q，r\in \mathbf{N}^*)$，则$a_m+a_n=a_p+a_q=2a_r$.

定向训练

(多选)已知单调递增的等差数列$\{a_n\}$满足$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{101}=0$，则下列各式 一定成立的有(　　)

A．$a_1+a_{101}>0$　　B．$a_2+a_{100}=0$　　C．$a_3+a_{100}\le 0$　　D．$a_{51}=0$

【解析】选BD.设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，易知$d>0$，

因为等差数列$\{a_n\}$满足$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{101}=0$，且$a_1+a_{101}=a_2+a_{100}=\ldots=a_{50}+a_{52}=2a_{51}$，

所以$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{101}=(a_1+a_{101})+(a_2+a_{100})+\ldots+(a_{50}+a_{52})+a_{51}=101a_{51}=0$，

所以$a_{51}=0$，$a_1+a_{101}=a_2+a_{100}=2a_{51}=0$，故B，D正确，A错误．又因为$a_{51}=a_1+50d=0$，所以$a_1=-50d$，

所以$a_3+a_{100}=(a_1+2d)+(a_1+99d)=2a_1+101d=2\times(-50d)+101d=d>0$，故C错误．

探究点二　等差数列的设法与求解

【典例2】已知四个数成等差数列，它们的和为26，中间两项的积为40，求这四个数．

【思维导引】方法一：直接设首项和公差，将已知条件转化为方程组求解．

方法二：直接设出4个数，根据题中条件列方程组求解．

方法三：等差数列相邻四项和为26，这四项有对称性，用对称设法求解．

【解析】方法一：设此等差数列的首项为a_1，公差为d，由已知，得$\begin{cases}a_1+a_1+d+a_1+2d+a_1+3d=26\\(a_1+d)(a_1+2d)=40,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=2,\\d=3,\end{cases}$或$\begin{cases}a_1=11,\\d=-3,\end{cases}$

所以这四个数分别为2，5，8，11或11，8，5，2.

方法二：设这四个数分别为a，b，c，d，由已知，得$\begin{cases}b-a=c-b=d-c,\\a+b+c+d=26,\\bc=40,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2,\\b=5,\\c=8,\\d=11\end{cases}$或$\begin{cases}a=11,\\b=8,\\c=5,\\d=2,\end{cases}$

所以这四个数分别为2，5，8，11或11，8，5，2.

方法三：设这四个数分别为$a-3d$，$a-d$，$a+d$，$a+3d$，由已知，得$\begin{cases}4a=26,\\a^2-d^2=40,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=\frac{13}{2},\\d=\pm\frac{3}{2}.\end{cases}$

所以这四个数分别为2，5，8，11或11，8，5，2.

【类题通法】 等差数列的设法

(1)当等差数列$\{a_n\}$的项数n为奇数时，可设中间项为a，再以公差为d向两边分别设项：…，$a-d$，a，$a+d$，….

(2)当等差数列$\{a_n\}$的项数n为偶数时，可设中间两项为$a-d$，$a+d$，再以公差为2d向两边分别设项：

…，$a-3d$，$a-d$，$a+d$，$a+3d$，….

定向训练

1．若三个数成等差数列，它们的和为9，平方和为59，则这三个数的积为

【解析】 设这三个数为$a-d$，a，$a+d$，则$\begin{cases}a-d+a+a+d=9,\\(a-d)^2+a^2+(a+d)^2=59.\end{cases}$解得$\begin{cases}a=3,\\d=4\end{cases}$或$\begin{cases}a=3,\\d=-4.\end{cases}$

所以这三个数为-1，3，7或7，3，-1，它们的积为-21.

2．已知四个数构成等差数列，前三个数的和为15，第一个数与第四个数的乘积为27，求这四个数.

【解析】 设这四个数为$a-d$，a，$a+d$，$a+2d$.得$\begin{cases}a-d+a+a+d=15,\\(a-d)(a+2d)=27,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=5,\\d=2,\end{cases}$或$\begin{cases}a=5,\\d=\frac{1}{2}.\end{cases}$

所以这四个数是：3，5，7，9或$\frac{9}{2}$，5，$\frac{11}{2}$，6.

课堂小结